

# **Modellierung und numerische Analyse des Faser-Matrix-Verbundes in UHPFRC unter Zugbeanspruchung**

**Svenja Höper**

**Institut für Statik  
Technische Universität Braunschweig**

**Bericht Nr. 2021-129**



# **Modellierung und numerische Analyse des Faser-Matrix- Verbundes in UHPFRC unter Zugbeanspruchung**

Von der  
Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina  
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades einer  
**Doktor-Ingenieurin (Dr.-Ing.)**  
genehmigte

## **Dissertation**

von  
Svenja Höper  
geboren am 28. Juni 1992  
in Holzminden

Einreichung am: 20. Januar 2021  
Disputation am: 14. Juli 2021

Berichterstatter: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Dieter Dinkler  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. Steffen Anders

ISBN 978-3-926031-31-0 (Printversion)

DOI 10.24355/dbbs.084-202111181516-0 (eBook)

Diese Dissertation ist über die Internetseite der Universitätsbibliothek Braunschweig online zugänglich.

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Schriftenreihe: Berichte aus dem Institut für Statik, Nr. 2021-129

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

© Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2021

Die Berichte können durch das Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig, Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, telefonisch unter +49 531/391-3667 oder per Mail an [statik@tu-bs.de](mailto:statik@tu-bs.de) bezogen werden.

# Kurzfassung

Ultrahochfester Faserbeton (UHPFRC) ist ein moderner und effizienter Verbundwerkstoff, der sich infolge der gemeinsamen Tragwirkung von Fasern und Matrix durch eine herausragende Leistungsfähigkeit und Robustheit auszeichnet. Mit überkritischen Fasergehalten erfährt das heterogene Gefüge nach der effektiven Überbrückung von Rissprozesszonen durch Mikrofasern eine ausgeprägte Mehrfachrissbildung. Diese generiert eine verfestigende und duktilitätssteigernde Wirkung auf das Tragverhalten in zugbeanspruchten Querschnittsbereichen. Das schließlich eintretende Versagen tritt mit der Öffnung von Makrorissen und dem Auszug der Fasern aus der Matrix an den Rissufern verzögert und mit äußerlich sichtbarer Vorankündigung ein. Zur Bestätigung und Ergänzung der positiven Erfahrungen in Experimenten und Praxisanwendungen werden zunehmend detailliertere und anspruchsvollere Modelle zur Beschreibung der komplexen Tragwirkung entwickelt. Das Verständnis der Fasertragwirkung in UHPFRC bildet die Grundlage für zukünftige Anwendungsregeln für die Ingenieurpraxis.

Das entwickelte Materialmodell beschreibt das lokale Verbundverhalten zwischen Faser und Matrix mechanismenorientiert und erfasst das elastische und inelastische Spannungs-Deformations-Verhalten der Grenzschicht mithilfe der Plastizitätstheorie und einer Schädigungsformulierung. In Verbindung mit um einen Algorithmus zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung erweiterten Interface-Elementen kann das Auszugverhalten einer Mikrostaalfaser aus einer ultrahochfesten Feinkornbetonmatrix numerisch analysiert werden. Dabei ist die fortschreitende Ablösung der Faser von der Matrix, die den irreversiblen Übergang zwischen starrem und verschieblichem Verbund darstellt, im Rahmen der Faseraktivierung von besonderer Bedeutung für die Faserwirksamkeit und die Verbundermüdung. Das Verbundmodell unterscheidet querdruckunabhängige Verbundmechanismen wie Adhäsion, Mikroverzahnung und Mikro-Interlocking von querdruck-induzierter Haft- und Gleitreibung. Dadurch kann die Interaktion der gekoppelten Strukturen mit der Grenzschicht adäquat dargestellt werden.

Numerische Untersuchungen einer in eine ungerissene Matrix eingebetteten Einzelfaser zeigen die dehnungsbehindernde, versteifende Faserwirkung im starren Verbund. Insbesondere bei auftretenden Imperfektionen und Fehlstellen im Gefüge ist die Rissinitiierung im Bereich des Faserendes als Unstetigkeitsstelle, an der bei Erreichen der Festigkeit signifikante Spannungsumlagerungen in der Matrix erfolgen, sehr wahrscheinlich. Das Auszugverhalten ist vor allem von dem Dehnungsvermögen der Faser und der Verbundqualität abhängig, wobei auch geometrische Parameter wie die Fasereinbindelänge, der Faserdurchmesser und mitwirkende Matrixdicke einen entscheidenden Einfluss auf die Spannungsverteilung entlang der Faser und quer dazu haben. Numerische Analysen von Einzelfaserauszugversuchen und weiterführende Parameterstudien ermöglichen eine detaillierte Auswertung der maßgebenden Einflussparameter im Hinblick auf die Fasertragwirkung in gerissenem UHPFRC. Daraus können Rückschlüsse auf eine vereinfachende Erfassung der Fasertragwirkung abgeleitet werden. Durch die irreversible Auflösung des starren Verbundes infolge zyklischer Beanspruchungen limitiert die Verbundermüdung das Potenzial von ultrahochfestem Faserbeton maßgeblich. Der Ermüdungsvorgang und die daraus folgenden Auswirkungen auf die Fasertragwirkung werden dargestellt und analysiert. Optimierungsmöglichkeiten und Kriterien zur Abschätzung der Tragreserven durch die Faserzugabe werden abschließend vorgestellt.





# Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	III
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit . . . . .	3
<b>2 Ultrahochfester Faserbeton</b>	<b>5</b>
2.1 Charakteristische Merkmale . . . . .	5
2.2 Material- und Tragverhalten . . . . .	9
2.2.1 Zugtragverhalten . . . . .	9
2.2.2 Drucktragverhalten . . . . .	11
2.2.3 Ermüdungsverhalten . . . . .	12
2.3 Materialmodelle und Bemessungsansätze . . . . .	17
2.3.1 Modellierungskonzepte . . . . .	17
2.3.2 Spannungs-Dehnungs-Kennlinien . . . . .	20
2.3.3 Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen . . . . .	22
2.4 Faserwirksamkeit . . . . .	27
2.4.1 Faserwirksamkeit in Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen . . . . .	28
2.4.2 Leistungsfähigkeit der Faserverstärkung . . . . .	30
<b>3 Phänomenologisches Verbundverhalten</b>	<b>31</b>
3.1 Verbundmechanismen . . . . .	31
3.1.1 Mikrostruktur der Verbundzone . . . . .	31
3.1.2 Mikrophysikalische Verbundwirkung . . . . .	32
3.2 Normalspannungsentwicklung . . . . .	35
3.2.1 Ein- und dreidimensionale Querdruckabhängigkeit . . . . .	36
3.2.2 Experimentelle Untersuchungen . . . . .	37
3.2.3 Theoretische Überlegungen . . . . .	37
3.3 Faserauszugversuche . . . . .	43
3.3.1 Experimentelle Untersuchungen des Verbundverhaltens . . . . .	44
3.3.2 Auszugversuche von Stahlfasern in UHPC . . . . .	45
3.3.3 Analyse des charakteristischen Auszugverhaltens . . . . .	47
3.3.4 Aussagekraft von Faserauszugversuchen . . . . .	53
3.4 Charakterisierung der Verbundqualität . . . . .	54
3.4.1 Einflüsse auf die initiale Verbundqualität . . . . .	55
3.4.2 Einflüsse auf den Verbundwiderstand bei Relativverschiebungen . . . . .	56
3.5 Ermüdungsverhalten der Verbundzone . . . . .	57
<b>4 Materialmodell für den Verbund</b>	<b>61</b>
4.1 Grundlagen der Modellierung . . . . .	61
4.1.1 Grundgleichungen zur Modellierung des Faser-Matrix-Verbundes . . . . .	61
4.1.2 Analytische Beschreibung des Faserauszugproblems . . . . .	63
4.1.3 „Shear-Lag“-Konzept . . . . .	66
4.1.4 Numerische Modellierung mit Interface-Elementen . . . . .	70
4.1.5 Verbundgesetze . . . . .	71
4.1.6 Verbundmodelle für nichtlineare Finite-Elemente-Analysen . . . . .	75

4.2	Materialmodell zur Beschreibung des Verbundverhaltens . . . . .	77
4.2.1	Materialgleichungen des Verbundmodells . . . . .	77
4.2.2	Zeitliche Diskretisierung und Integration der Materialgleichungen . . .	90
4.2.3	Lokales Konvergenzverhalten . . . . .	100
4.2.4	Numerische Umsetzung im dreidimensionalen Spannungsraum . . . .	103
4.3	Wesentliche Aspekte des modellierten Verbundverhaltens . . . . .	107
4.3.1	Verifikation des Materialmodells . . . . .	107
4.3.2	Interaktion des Materialmodells mit umgebenden Strukturen . . . . .	112
4.3.3	Varianten der Schädigungsmodellierung . . . . .	115
4.3.4	Beschreibung der Verbundermüdung . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Modellierung des Faserauszugverhaltens</b>	<b>123</b>
5.1	Dreidimensionales Finite-Elemente-Modell . . . . .	123
5.1.1	Beschreibung des Berechnungsmodells . . . . .	123
5.1.2	Aufbau und Lösung des Gleichungssystems . . . . .	125
5.2	Geometriemodell für die Verbundzone . . . . .	127
5.2.1	Modellierungsansätze für die Verbundzone . . . . .	127
5.2.2	Das „Zero-Thickness“-Interface-Element . . . . .	128
5.2.3	Verifikation des Verbundmodells . . . . .	135
5.3	Erweiterung für den verschieblichen Verbund . . . . .	140
5.3.1	Algorithmus zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung . . . . .	140
5.3.2	Mismatching meshes . . . . .	149
5.3.3	Rissöffnungsarten der Verbundzone . . . . .	154
<b>6</b>	<b>Numerische Analyse der Fasertragwirkung</b>	<b>159</b>
6.1	Numerische Analyse des starren Faser-Matrix-Verbundes . . . . .	159
6.1.1	Modellierung des Materialverhaltens von Stahldrahtfasern . . . . .	160
6.1.2	Modellierung des Materialverhaltens von UHPC . . . . .	161
6.1.3	Fasertragwirkung in ungerissenem UHPFRC . . . . .	165
6.2	Numerische Analyse des Faserauszugproblems . . . . .	171
6.2.1	Vergleich ausgewählter Faserauszugversuche aus der Literatur . . . . .	171
6.2.2	Kalibrierung des Verbundmodells . . . . .	176
6.2.3	Validierung des Verbundmodells . . . . .	183
6.2.4	Einflüsse auf das Auszugverhalten . . . . .	195
6.3	Auswertung der Fasertragwirkung . . . . .	203
6.3.1	Numerische Analyse der Verbundermüdung . . . . .	203
6.3.2	Leistungsfähigkeit der Faserverstärkung in UHPFRC . . . . .	211
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>215</b>
7.1	Zusammenfassung . . . . .	215
7.2	Ausblick . . . . .	216
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>219</b>

# Symbolverzeichnis

## Notation

$a, \alpha$	Skalar bzw. Tensor 0. Stufe
$\delta a$	Virtuelle Größe $a$
$ a $	Betrag von $a$
$\ \mathbf{a}\ _2$	Euklidische Norm von $\mathbf{a}$
$\Delta a$	Inkrement von $a$
$da$	Differenzial von $a$
$\ln(a)$	Natürlicher Logarithmus von $a$
$\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}$	Vektor bzw. Tensor 1. Stufe
$\mathbf{a}^T$	Transponierter Vektor $\mathbf{a}$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Kreuzprodukt bzw. Vektorprodukt der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$
$\mathbf{A}$	Matrix bzw. Tensor 2. Stufe
$\mathbf{A}^T$	Transponierte Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inverse Matrix der quadratischen Matrix $\mathbf{A}$
$\det \mathbf{A}$	Determinante der quadratischen Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Matrixprodukt der Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$
$f(a, t)$	Funktion in Abhängigkeit der Variablen $a$ und der Zeit $t$
$\dot{f}(a, t) = \frac{\partial f(a, t)}{\partial t}$	Rate bzw. Ableitung der Funktion $f$ nach der Zeit $t$
$\frac{\partial f(a, t)}{\partial a}$	Partielle Ableitung der Funktion $f$ nach der Variablen $a$
$\frac{\partial^2 f(a, t)}{\partial a^2}$	Zweite partielle Ableitung der Funktion $f$ nach der Variablen $a$
$f'(a) = \frac{df(a)}{da}$	Vollständige Ableitung der Funktion $f$ nach der Variablen $a$

## Koordinatensysteme

$\parallel, \perp$	Lokale Koordinaten in der ebenen Verbundzone
$\xi, \eta$	Örtliche Koordinaten im ebenen Referenzkoordinatensystem
$\xi, \eta, \zeta$	Örtliche Koordinaten im räumlichen Referenzkoordinatensystem
$\zeta$	Lokale Koordinate entlang der Verbundlänge
$r, \theta, z$	Globale Zylinderkoordinaten
$s, t, n$	Lokale Koordinaten in der Verbundzone
$x, y, z$	Globale, kartesische Koordinaten

## Indizes

### Tiefgestellte Indizes

0	Anfangswert
$\infty, f$	Endwert
$\theta$	Orientierungseinfluss
a	Abstand zur Lasteinleitung
b	Verbund, <i>engl.</i> bond; Zweiachsigkeit, <i>engl.</i> biaxiality
c	Beton, <i>engl.</i> concrete; Druck, <i>engl.</i> compression
cr	Riss, <i>engl.</i> crack
d	Ablösung, <i>engl.</i> debonding
D	Draht, Rohdraht
e	Einbindung, Einbettung, <i>engl.</i> embedment
eff	Effektiver Wert, <i>engl.</i> effective value
el	Elastizität, <i>engl.</i> elasticity
El	Element
f	Faser, Einzelfaser, <i>engl.</i> fibre
F	Faserbeton, <i>engl.</i> fibre-reinforced concrete
ges	Gesamtwert
GK	Größtkorn
gl	Globales Koordinatensystem
H	Haftung
it	Aktueller Wert innerhalb einer Iteration
k, c	Charakteristischer Wert, <i>engl.</i> characteristic value
krit	Maximal zulässiger Wert, kritischer Wert
$\ell$	Längeneinfluss, <i>engl.</i> length
L1, L2	Leistungsklasse 1, Leistungsklasse 2
lim	Grenzwert, <i>engl.</i> limit value
lo	Lokales Koordinatensystem
m	Mittelwert; Matrix
max	Maximalwert
min	Minimalwert
mod	Modifikation
o	Oberer Grenzwert; Orientierungseinfluss
P	Unbewehrter Beton, <i>engl.</i> plain concrete
p	Post-kritischer Wert
R	Grenzwert nach Rissbildung
s	Schwinden, <i>engl.</i> shrinkage; Verschieblicher Verbund, <i>engl.</i> sliding bond; Stahl, <i>engl.</i> steel; Bewehrungsstahl, Stabstahl
s, SLS	Grenzwert im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit, <i>engl.</i> serviceability limit state

Sy	Systemebene
r	Starrer Verbund, <i>engl.</i> rigid bond
t	Zug, <i>engl.</i> tension
u	Unterer Grenzwert
u, ult, ULS	Grenzwert im Bruchzustand bzw. Grenzzustand der Tragfähigkeit, <i>engl.</i> ultimate limit state
y	Fließgrenze, <i>engl.</i> yield limit

### Hochgestellte Indizes

3D	Dreidimensionaler Raum
$\infty$	Endwert
el	Elastischer Anteil
f	Faserbeton
i	Initiierung der Rissbildung, Erstrissbildung
in	Inelastischer Anteil
R	Reibung

### Skalare, Tensoren 0. Stufe

#### Parameter

$\alpha$	Schädigungswachstumsfaktor
$\beta$	Neigungswinkel; „Shear-Lag“-Parameter
$\gamma$	Faserwirksamkeitsfaktor bei ungerissenem Faserbeton; Skalierungsfaktor für Mikro-Interlocking
$\varepsilon$	Toleranz-Grenzwert
$\eta$	Faserorientierungsbeiwert; Querdruckentwicklungskoeffizient
$\lambda$	Schlankheit; Anisotropiebeiwert
$\mu$	Reibkoeffizient
$\nu$	Querdehnzahl bzw. Poissonzahl
$\rho$	Fasergehalt
$\phi$	Ansatzfunktion bzw. Formfunktion
A	Querschnittsfläche
b	Breite
c	Kohäsionsbeiwert
d	Durchmesser
E	Elastizitätsmodul
f	Festigkeit
$FLK_f$	Faserleistungskennzahl einer Einzelfaser
g	Faserwirksamkeitsbeiwert

$G$	Energiefreisetzungsrate; Schubmodul
$G_F$	Spezifische Bruchenergie
$h$	Höhe
$H$	Verfestigungsmodul
$k$	Faktor ( $k \in [0; 1]$ ); Punktrasterweite im Knotensuchalgorithmus
$\ell$	Länge, <i>engl.</i> length
$n$	Anzahl
$N$	Ertragbare Lastspielzahl
$p$	Kontaktpressung; Flächenlast
$P$	Auszugwiderstand; Auszugkraft bzw. Ausziehlast
$Q$	Plastisches Potenzial
$r$	Radius; Abstand zwischen Faser- und Matrixoberfläche in radialer Richtung; Residuum, Restgrößeninkrement
$s_c$	Grenzwert des zulässigen lokalen Schlupfes bis zum Beginn des Debondings
$s_d$	Lokaler, inelastischer Schlupf zum Ende des Debondings
$u, U$	Umfangslänge
$V$	Volumenanteil
$w$	Wichtungsfaktor
$w/z$	Wasser-Zement-Wert

## Variablen

$\beta$	Schädigungsentwicklungspotenzial
$\gamma$	Schubverzerrung, Gleitung
$\delta$	Verschiebung, Weg; Relativverschiebung
$\varepsilon$	Dehnung, Verzerrung
$\eta$	Verfestigungsvariable
$\theta$	LODE-Winkel
$\kappa$	Verfestigungsvariable
$\lambda$	Plastischer Multiplikator
$\rho$	HAIGH-WESTERGAARD-Koordinate
$\xi$	HAIGH-WESTERGAARD-Koordinate
$\sigma$	Spannung
$\tau$	Verbundspannung, Schubspannung
$\psi$	Degradationsvariable
$d, D$	Schädigungsvariable; Verbundzonenschädigung
$A$	Arbeit
$F$	Kraft; Versagenskriterium
$I$	Invariante des Spannungstensors
$J$	Invariante des Spannungsdeviators
$s$	Schlupf

$u, v, w$	Verschiebungen in Richtung der kartesischen Koordinaten
$w$	Rissweite, Rissöffnung

## Vektoren, Tensoren 1. Stufe

$\delta$	Relativverschiebungen
$\tau$	Verbundspannungen
$\mathbf{f}$	Lastvektor
$\mathbf{n}$	Normierter Richtungsvektor bzw. Einheitsvektor
$\mathbf{N}$	Vektor der Formfunktionen
$\mathbf{p}$	Randspannungen
$\mathbf{r}$	Vektor der Residuen
$\mathbf{u}$	Verschiebungen
$\mathbf{v}$	Knotenweggrößen; Vektor der Zustandsvariablen
$\mathbf{x}_P$	Globale Koordinaten eines Punktes $P$

## Matrizen, Tensoren 2. Stufe

$\varepsilon$	Verzerrungstensor
$\sigma$	Spannungstensor
$\Omega$	Ansatzmatrix
$\mathbf{B}$	Hilfsmatrix zur Auswertung von Knotenpaaren
$\mathbf{C}$	Materialtangente
$\mathbf{C}^{\text{el}}$	Elastische Materialtangente
$\mathbf{E}$	Elastizitätsmatrix
$\mathbf{F}^{\text{el}}$	Invertierte elastische Materialtangente bzw. Nachgiebigkeitsmatrix
$\mathbf{H}$	Ansatzmatrix für separierte Knotenpaare
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix bzw. Identitätsmatrix
$\mathbf{J}$	JACOBI-Matrix
$\mathbf{K}$	Tangente, Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{M}$	Zuordnungsmatrix
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix
$\tilde{\mathbf{X}}$	Elementknotenkoordinaten

Abweichende Definitionen sowie nicht aufgeführte Symbole sind im Text erläutert.





# 1 Einleitung

Im Zuge neuer Werkstoffentwicklungen und Fertigungstechnologien wächst der Bedarf an anspruchsvollen Modellierungsansätzen zur Ausnutzung der hoch entwickelten Materialeigenschaften in der Tragwerksbemessung. Die gleichzeitig vordringlicher werdende, öffentlich diskutierte Forderung nach mehr Nachhaltigkeit und Ressourceneffizienz in der Bauindustrie macht effiziente Verbundwerkstoffe wie ultrahochfesten Faserbeton zu Werkstoffen der Zukunft. Die Ausschöpfung der Potenziale dieses Hochleistungsbaustoffes erfordert die präzise und realitätsnahe Charakterisierung und Modellierung der gemeinschaftlichen Tragwirkung des Faser-Matrix-Verbundes, die wiederum die genaue Kenntnis der Verbundwirkung zwischen den Komponenten und ihrer Einflussfaktoren voraussetzt. Im Hinblick auf eine lange Tragwerkslebensdauer rückt dabei immer häufiger das Ermüdungsverhalten von faserverstärkten Betonen in den Vordergrund. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Fasertragwirkung in ultrahochfestem Beton unter Zugbeanspruchungen anhand von numerischen Untersuchungen des Faser-Matrix-Verbundes mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) untersucht.

## 1.1 Motivation

Die gemeinsame Tragwirkung von Fasern und Matrix in stahlfaserverstärkten Betonen ist maßgeblich durch den Verbund zwischen Stahl und Beton bestimmt. Bei ultrahochfesten Faserbetonen werden im Regelfall überkritische Fasergehalte generiert, sodass bereits vor Einsetzen der Rissbildung eine signifikante Verstärkungswirkung durch die Faserzugabe auftritt. Für eine optimale Ausnutzung der Tragfähigkeit ist daher eine Berücksichtigung der Fasertragwirkung sowohl im ungerissenen, als auch im gerissenen Zustand des Bemessungsquerschnittes anzustreben. Dabei sind fertigungsbedingte Unsicherheiten etwa infolge von streuenden Gefügeeigenschaften und Faserverteilungen realistisch zu erfassen und in die Bemessung einzubeziehen. Denn nur die detaillierte Kenntnis der maßgebenden Mechanismen und Einflussgrößen der Verbundwirkung lässt eine sichere Beurteilung der Fasertragwirkung im Rahmen der Tragwerksplanung zu.

Das Verbundverhalten zwischen Stahl und Beton wird seit einigen Jahrzehnten experimentell untersucht. Dafür sind mittlerweile verschiedene Prüfkörper und Versuchsaufbauten erprobt. Die üblichen Durchmesser der untersuchten Bewehrungsstäbe erlauben dabei eine direkte Erfassung des Verbundverhaltens in Auszugversuchen im Maßstab 1:1, da bei verhältnismäßig kurzen Verbundlängen eine nahezu konstante Verbundspannungsverteilung vorherrscht. Die verbesserte Verbundwirkung beispielsweise von geripptem Betonstahl gegenüber einer Bewehrung mit glatter Stahloberfläche kann so eindeutig durch experimentelle Untersuchungen belegt werden. Als Ergebnis umfangreicher Serien an Verbundversuchen ist das Bemessungskonzept für erforderliche Verankerungslängen der Stabstahlbewehrung in Abhängigkeit der Verbundsituation heute von großer Bedeutung für die Tragwerksanalyse in der Ingenieurpraxis. Die darin zugrunde gelegten Ingenieurmodelle bilden die Tragwirkung realitätsnah ab, sodass die Mechanismen der Verbundwirkung zwischen geripptem Betonstahl und Beton als verstanden gelten. Bei Sonderfällen und komplexen Konstruktionen werden aufgrund des gestiegenen Kosten- und Zeitdruckes heutzutage numerische Modelle in unterschiedlichen Komplexitätsstufen für den Nachweis der ausreichenden Bewehrungsverankerung herangezogen. Besonders im Rahmen der Forschung an neuartigen Verbundwerkstoffen sind experimentelle Untersuchungen mit unerforschten Bewehrungsmaterialien und Betonrezepturen weiterhin üblich.

Die Übertragung dieser Herangehensweise auf die Skalenebene der häufig verwendeten Mikrofasern ist nicht möglich. Das Gefüge der Betonmatrix kann auf der Mikroebene nicht als homogen betrachtet werden und ist unkontrollierbaren Einflüssen aus der Fertigung unterworfen. Eine maßstabsgerechte Skalierung des Prüfkörpers auf die Größenverhältnisse bei konventionellem Bewehrungsstahl wäre aufgrund der Herstellung der Stahldrahtfasern nicht vergleichbar mit der Realität. Die geringe Einbindelänge bei Kurzfasern in einem Auszugversuch erfordert die Verwendung von Feinprüfmaschinen und ein exaktes Arrangement der Faser während der Betonage zur Minimierung von Fertigungstoleranzen. Die Durchführung von speziellen Auszugversuchen mit einer verlängerten Einbindelänge repräsentiert unter Umständen aufgrund des manipulierten Verhältnisses zwischen der Verbundfläche und der Querschnittsfläche der Faser unerwünschte Versagensmodi, z. B. ein Reißen der Faser anstelle eines Auszuges. Darüber hinaus ist das so erfasste Auszugverhalten bereits bei üblichen Einbindetiefen der schlanken Mikrofasern nicht mehr mit dem Verbundverhalten gleichzusetzen, wie es für Bewehrungsstahl mit definierten Verbundlängen hingegen möglich ist. Für die Übertragung des so erfassten Auszugverhaltens auf das Verbundverhalten sind darüber hinaus Kenntnisse über die Verbundspannungsverteilung entlang der Verbundlänge erforderlich.

Die experimentelle Erfassung der Verbundwirkung bei Mikrofasern ist jedoch nicht nur aufgrund des kleineren Maßstabes problematisch. Die Verbundwirkung zwischen Mikrofasern und der inhomogenen Betonmatrix ist stark ausgeprägten Streuungen unterworfen, was eine experimentelle Erfassung des Verbundes sowie der maßgeblichen Einflussparameter erschwert. Die Feststellung einer mittleren Verbundwirkung und der zu erwartenden Standardabweichungen infolge material- und fertigungsbedingter Streuungen ist aufgrund der erforderlichen Vielzahl an Versuchen zeit- und kostenintensiv. Alternativ wird daher häufig mithilfe von experimentellen Untersuchungen an Faserbetonstrukturen mit beliebiger Faserverteilung und -orientierung das resultierende Materialverhalten des Verbundwerkstoffes untersucht und mit einfachen Ingenieurmodellen verschmiert beschrieben. Dabei entbehrt diese Herangehensweise der detaillierten Kenntnis über die grundlegende Fasertragwirkung.

Numerische Methoden erlauben rechnerische Untersuchungen weit über die Grenzen der analytischen Lösbarkeit von Problemstellungen in Wissenschaft und Praxis hinaus. Die Finite-Elemente-Methode als numerische Methode zur strukturmekanischen Analyse von Tragwerken hat sich dabei als vielseitig, vergleichsweise genau und vielfältig in Strukturanalysen erprobt durchgesetzt. In Verbindung mit unterschiedlichen kontinuumsmechanischen Modellen zur Beschreibung des komplexen Materialverhaltens der Einzelkomponenten kann mit der FEM auch die gemeinsame Tragwirkung von diskontinuierlich zusammengesetzten Verbundstrukturen erfasst werden. Abseits von einer starren Kopplung der Strukturkomponenten ermöglichen spezielle Verbundzonenelemente die Modellierung der Verbundwirkung. Für die Beschreibung des Verbundverhaltens zwischen konventionellem Bewehrungsstahl und Beton liegen darüber hinaus bereits umfassende Erfahrungen im Hinblick auf die Modellierung mit der Finite-Elemente-Methode vor, auf die bei der Modellentwicklung zurückgegriffen werden kann.

Im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) geförderten Verbundforschungsvorhabens im Schwerpunktprogramm 2020 wird die Fasertragwirkung in ultrahochfestem Faserbeton unter Zugbeanspruchung experimentell und numerisch untersucht. Ziel des Schwerpunktprogramms ist das Verständnis und die Beschreibung der Materialdegradation von Hochleistungsbetonen mit und ohne Faserverstärkung infolge zyklischer Beanspruchungen. Die Modellierung und numerische Analyse der Fasertragwirkung, die im Folgenden auf der Basis der Forschungsergebnisse in diesem Projekt vorgestellt wird, stellt daher eine wichtige Vorausset-

zung für weitergehende Untersuchungen des Materialverhaltens von ultrahochfestem Faserbeton unter zyklischer Beanspruchung dar.

## 1.2 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Die Beschreibung der Fasertragwirkung einschließlich der Aktivierungs- und Degradationsmechanismen ist essenziell für das Verständnis des Materialverhaltens von ultrahochfestem Faserbeton und vorrangig für die Bemessung von zugbeanspruchten Strukturbereichen interessant. Die Charakterisierung und Modellierung der Tragwirkung insbesondere rissüberbrückender Mikrostahtfasern im Nachrissbereich des Zugtragverhaltens in ihrer Größe und ihrem Verlauf ist die Grundlage für die zukünftige Bestimmung von Resttragfähigkeiten und der Robustheit einer Struktur unter anderem in Abhängigkeit von Fasergehalt, Faserverteilung und Faserorientierung und das Ziel dieses Forschungsvorhabens. Dem experimentellen Programm des dieser Arbeit zugrunde liegenden Verbundforschungsvorhabens entsprechend ist die Modellierung an geraden, hochfesten Stahldrahtfasern mit glatter Faseroberfläche und ultrahochfestem Feinkornbeton orientiert. Als Anschauungsbeispiel zur Untersuchung der Fasertragwirkung dient unter anderem der weggesteuerte Einzelfaserauszugversuch.

Die Erfassung des Potenzials faserverstärkter Hochleistungsbetone gemäß dem aktuellen Stand der Forschung erfolgt zunächst auf Basis einer umfassenden Literaturrecherche. In Kapitel 2 wird der derzeitige Kenntnisstand zur Tragwirkung von ultrahochfestem Faserbeton herausgearbeitet und anhand vorhandener Bemessungskonzepte evaluiert. Die Definition der Faserwirksamkeit dient in einigen Bemessungsansätzen der Erfassung des Traganteiles der zugegebenen Fasern. In der Literatur vorhandene Ansätze zur Charakterisierung der Fasertragwirkung werden vorgestellt.

Aus der Identifikation des phänomenologischen Verbundverhaltens anhand von experimentellen Untersuchungsergebnissen im Rahmen des Schwerpunktprogramms sowie mithilfe der einschlägigen Fachliteratur folgt die Festlegung der Anforderungen an die vorgesehene Modellierung. Dafür erfolgt in Kapitel 3 die Charakterisierung der auftretenden Verbundmechanismen sowie die Beschreibung des Degradationsverhaltens in der Verbundzone zwischen Mikrostahtfasern und ultrahochfestem Beton. Die Unterscheidung maßgebender Verbundphasen ermöglicht das detaillierte Verständnis des Auszugverhaltens mit einer nichtlinearen Verbundspannungsverteilung über die Einbindelänge der Faser in der Matrix. Ergänzend dazu wird die Aussagekraft von Faserauszugversuchen evaluiert. Dem aktuellen Forschungsstand entsprechend werden Einflussparameter auf die Verbundqualität sowie das erwartete Ermüdungsverhalten der Verbundzone dargelegt.

Phänomenologisch motiviert und mechanismenorientiert erfolgt darauf aufbauend die dreidimensionale Modellierung der mikrophysikalischen Verbundwirkung im Faser-Matrix-Verbund. Dazu wird in Kapitel 4 eine Übersicht über die mechanischen Grundgleichungen und die in der Literatur vorhandenen Modellierungsansätze zur Beschreibung des Faserauszugproblems gegeben, bevor die numerische Modellierung des Faser-Matrix-Verbundes mithilfe von Interface-Elementen und Verbundgesetzen oder Materialmodellen dargelegt werden. Die Übertragung der für den Verbund von geripptem Bewehrungsstahl in normalfestem Beton vorhandenen Modellierungsansätze auf das Verbundverhalten von in einer ultrahochfesten Feinkornbetonmatrix eingebetteten Mikrostahtfasern führt schließlich auf die Herleitung der Materialgleichungen des entwickelten Verbundmodells. Das kontinuumsmechanische Materialmodell beschreibt die

anhand der Literaturstudie in Kapitel 3 identifizierte Entwicklung der Verbundwirkung in Abhängigkeit der Relativverschiebungen zwischen Faser und Matrix durch die Einbeziehung von irreversiblen Schlupf und die Berücksichtigung einer schädigungsinduzierten Degradation der Verbundkapazität. Darüber hinaus ist durch die Berücksichtigung des Spannungs-Deformations-Zustandes in unmittelbarer Umgebung der Verbundzone eine Interaktion des Materialverhaltens mit den umgebenden Strukturen gegeben.

Die Fasertragwirkung wird im Rahmen dieser Arbeit mit numerischen Analysen mit der dreidimensionalen Finite-Elemente-Methode auf der Mesoskala untersucht. In Kapitel 5 wird das FE-Modell für die Simulation des Faserauszugverhaltens vorgestellt. Die Grenzschicht zwischen der diskret aufgelösten Einzelfaser und der Betonmatrix mit verschmierten Materialeigenschaften wird mithilfe von zweidimensionalen Verbundzonenelementen und dem entwickelten Verbundmaterialmodell modelliert. Dabei werden sowohl das Kontaktproblem nach der Ablösung der Faser von der Matrix, als auch die einsetzenden großen Relativverschiebungen berücksichtigt. Die Entwicklung von Interface-Elementen mit einem Algorithmus zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung ermöglicht die kombinierte Betrachtung von physikalischer und geometrischer Nichtlinearität im Faserauszugproblem. Die Verifikation des Verbundmodells erfolgt anhand analytischer Untersuchungen zum starren Verbund und mithilfe der Simulation von maßgebenden Rissöffnungs- und Deformationsarten der Bruchmechanik.

Die numerische Analyse der Fasertragwirkung wird in Kapitel 6 vorgestellt. Zunächst wird die gemeinsame Tragwirkung der gekoppelten Struktur anhand einer vollständig in die Betonmatrix eingebetteten Faser unter einer zentrischen Zug- oder Druckbeanspruchung untersucht. Die Kalibrierung des entwickelten Verbundmodells erfolgt anhand von numerischen Analysen des Faserauszugproblems mit geraden, unprofilierten Fasern in einer ultrahochfesten Betonmatrix im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen aus der Literatur. Zur Validierung des FE-Modells werden unterschiedlich konfigurierte Einzelfaserauszugversuche numerisch simuliert. Anhand von ausgewählten Untersuchungen mit variierenden Geometrie- und Materialparametern wird die Optimierung der Fasertragwirkung hinsichtlich verschiedener Einflussgrößen analysiert. Auf der Grundlage dieser Anwendungen erfolgt die zusammenfassende Bewertung des entwickelten Verbundmodells. Darüber hinaus liefert die numerische Simulation eines Einzelfaserauszugversuches mit zyklischer Zugbeanspruchung Hinweise bezüglich der Verbundermüdung. Schließlich erfolgt die Übertragung der Untersuchungsergebnisse auf das Material- und Degradationsverhalten von faserverstärktem, ultrahochfesten Beton.

Abschließend werden die gewonnenen Erkenntnisse in Kapitel 7 zusammengefasst und bewertet. Des Weiteren wird ein Ausblick auf zukünftige Weiterentwicklungen der Modellierung von Faserverbundwerkstoffen gegeben.

## 2 Ultrahochfester Faserbeton

Als ein natürlicher Faserverbundwerkstoff beweist Holz die Effektivität von zwei- oder mehrphasigen Verbundwerkstoffen mit einer kraftübertragenden Grenzschicht zwischen den Komponenten Faser und Matrix und dient daher als Vorlage für die industrielle Entwicklung moderner, faserverstärkter Hochleistungswerkstoffe. Während die Druckfestigkeit und Beständigkeit von Holz im Wesentlichen auf den Eigenschaften der stabilen Matrix aus Lignin und Hemizellulose beruhen, generieren die darin eingebetteten Zellulosefasern seine Zugfestigkeit [SH16]. Dem natürlichen Wuchs entsprechend unterscheiden sich nahezu alle Materialeigenschaften in den drei Hauptrichtungen, i. e. parallel zur Faserrichtung, parallel zu den Holzstrahlen, d. h. in radialer Richtung, und parallel zum Jahrringverlauf, d. h. tangential [NS17]. Das für Holz typische anisotrope Materialverhalten weisen auch Holzwerkstoffe als industriell gefertigte Verbundwerkstoffe mit aufgelöster Holzstruktur auf. Weitere Beispiele von natürlichen oder künstlichen Faserverbundwerkstoffen sind z. B. in der Textil- oder Automobilindustrie zu finden.

Faserverbundwerkstoffe profitieren von den Wechselwirkungen der Komponenten Fasern und Matrix und weisen dadurch im Allgemeinen höherwertige Materialeigenschaften auf als ihre Einzelkomponenten. Die Verstärkung einer Matrix mit langen oder kurzen, sehr dünnen Fasern ist insbesondere hinsichtlich der Zugfestigkeit des Komposits vorteilhaft, da entsprechend den Untersuchungen von GRIFFITH, veröffentlicht im Jahr 1920, dünne Fasern gegenüber dickeren Stäben durch die verbesserte Ausrichtung der Molekülketten eine höhere spezifische Zugfestigkeit in Faserlängsrichtung erreichen [Gri21]. Die Überbrückung lokaler Schwachstellen wie beispielsweise aufgehender Risse durch die Verbundwirkung zwischen Fasern und Matrix führt zu einer gesteigerten Duktilität des Verbundwerkstoffes. Durch die unterschiedlichen Materialeigenschaften der Komponenten können aber auch Zwangsspannungen oder Vorschädigungen infolge von äußeren oder inneren Einwirkungen, wie beispielsweise Temperaturänderungen, Schwinden und Kriechen, generiert werden. Die realitätsnahe Beschreibung und Modellierung von Faserverbundwerkstoffen zeichnet sich daher durch eine hohe Komplexität aus und erfordert ein detailliertes Verständnis des Zusammenwirkens der beteiligten Komponenten.

### 2.1 Charakteristische Merkmale

Seit einigen Jahrzehnten werden im Rahmen der wissenschaftlichen und industriellen Materialforschung immer neue Generationen von Ultrahochleistungsbetonen entwickelt. Diese High-Tech Werkstoffe weisen durch die optimierte Kombination von Komponenteneigenschaften eine herausragende Leistungsfähigkeit auf und kommen aufgrund der kostenintensiven, große Sorgfalt erfordernden Herstellung vorzugsweise als Fertigteile zum Einsatz. Die Vorfertigung im Werk ermöglicht dabei die Sicherstellung einer sehr hohen Materialqualität und optimalen Nachbehandlung der Segmente. Durch die geforderte Ressourceneffizienz sind optimierte Querschnitte und leichtgewichtige, schlanke Bauteile, deren Transport so unproblematisch wie möglich ist, zunehmend von Interesse, sodass Ultrahochleistungsbeton ein vielversprechendes Zukunftspotenzial hat. Anwendungsgebiete sind Bauteile von Brücken, Masten oder Türmen sowie filigran anmutende, leichte und scharfkantige Fassadenelemente. Auch für Instandsetzungs- und Verstärkungsmaßnahmen bestehender Bauteile und die Vorfertigung hoch beanspruchter Stoßbereiche und kraftflussoptimierter Knotenpunkte haben ultrahochfeste Betone bereits vielfach Anwendung gefunden [BFW17].

Als ultrahochfester Beton (*engl.* Ultra-High Performance Concrete, UHPC) wird ein Beton bezeichnet, der eine charakteristische Druckfestigkeit  $f_{ck}$  zwischen 150 und 250 N/mm<sup>2</sup> aufweist [DAf08]. Die Druckfestigkeit liegt dabei deutlich über der derzeit höchsten bauaufsichtlich geregelten Druckfestigkeitsklasse C100/115 für hochfesten Beton (*engl.* High-Performance Concrete, HPC) und entspricht etwa dem Siebenfachen der Druckfestigkeit normalfester Betone. Die hohe Leistungsfähigkeit ist das Ergebnis des vor allem hinsichtlich seiner Dichte betontechnologisch optimierten Mikrogefüges.

In Deutschland sind die rheologischen und mechanischen Materialeigenschaften ultrahochfester Betone derzeit nicht normativ geregelt. Basierend auf den Ergebnissen des durch die DFG geförderten Schwerpunktprogramms 1182 „Nachhaltiges Bauen mit Ultra-Hochfestem Beton“ wurde 2008 durch den Deutschen Ausschuss für Stahlbeton e. V. (DAfStb) ein informativer, umfangreicher Sachstandsbericht [DAf08] zum Stand des Wissens über den neuen Werkstoff als Heft 561 veröffentlicht. Anders als eine Richtlinie stellt dieser Sachstandsbericht keine anerkannte Regel der Technik dar und hat keinen bindenden Charakter. Eine neue Richtlinie zu ultrahochfestem Beton wird derzeit vom DAfStb erarbeitet.

Hauptbestandteil der Festbetonmatrix ist das hochfeste, schnell erhärtende Bindemittel aus Portlandzement in Kombination mit Hüttensand und Flugasche sowie teilweise puzzolanisch reaktiven Mikrofüllstoffen. Darüber hinaus ist auch ein erheblicher Anteil unhydratisierter Zementbestandteile vorhanden. Die grobe oder feine Gesteinskörnung mit einem Größtkorndurchmesser  $d_{GK}$  ober- oder unterhalb von 1 mm ist bei guter Abstimmung der Korngrößen in einer sehr hohen Packungsdichte angeordnet. Wasser- oder Luftporen sind anders als bei Normalbeton nicht zu Kapillarporen verbunden. Basierend auf den Erkenntnissen über den „Reactive Powder Concrete“ (RPC) der 1960er Jahre wird die moderne Betontechnologie ständig weiterentwickelt und optimiert. Die Bildung der besonders hohen Gefügedichte wird vor allem durch niedrige Wasser-Zement-Werte unterhalb von  $w/z = 0,25$ , ausgewählte reaktive und inerte mineralische Feinststoffe wie beispielsweise Quarzmehl und Silikastaub und den Einsatz spezieller Betonzusatzmittel, wie z. B. ein Hochleistungsfließmittel, ermöglicht.

Als eine Folge dieser festigkeitssteigernden Gefügeoptimierung ist bei hochfesten und ultrahochfesten Betonen die Mikrostruktur der Verbundzone zwischen den Zuschlägen und der Bindemittelmatrix so verbessert, dass die Rissbildung anders als bei Normalbeton durch die Gesteinskörnung hindurch verläuft [Leu07], [Jun06], [BFW17]. Die Festigkeit der Gesteinskörnung sollte daher mindestens der des Zementsteins entsprechen, um lokale Schwachstellen zu vermeiden. Während bei normalfestem Beton die Verbundzone zwischen Bindemittelmatrix und Gesteinskörnung aufgrund von Hohlräumen in der Kornpackung sowie der Ablagerung von Portlandit und Ettringitbildung an den Kornoberflächen im Allgemeinen eine geringere Festigkeit aufweist als die übrige Zementsteinmatrix, werden dieser Verbundzone bei UHPC nahezu dieselben Materialeigenschaften zugeschrieben wie der übrigen Bindemittelmatrix [Ste13], [Dro04].

Darüber hinaus wird infolge der Gefügeoptimierung ein ausgeprägtes Schwindverhalten, insbesondere Frühschwinden beobachtet. Dieses Schwindverhalten kann sowohl Schwinddehnungen als auch Schwindeigenspannungen oder Schwindrisse hervorrufen [KHDB02]. Das Endschwindmaß  $\epsilon_{cs}^{\infty}$  von UHPC wird in der Literatur zu etwa 0,7 bis 0,9 mm/m angegeben [DAf08]. In experimentellen Untersuchungen zeigt die Zugabe von Kunststoff- oder Glasfasern eine positive Beeinflussung des Frühschwindens [KHDB02].

Sowohl unter einer Druckbeanspruchung als auch unter einer Zugbeanspruchung ist das nahezu linear-elastische Spannungs-Deformations-Verhalten von ultrahochfestem Beton unmittelbar bei Erreichen der Festigkeit durch ein sehr sprödes und explosives Versagen gekennzeichnet [DAf08]. Ursächlich dafür ist die im Vergleich zu Normalbeton verringerte Energiedissipation bei der Rissbildung. Diese ergibt sich aus der durch die hochfeste Bindemittelmatrix verkleinerten Rissprozesszone und der Rissentwicklung, die nicht mehr den Korngrenzen folgt und durch Poren beeinflusst wird. Eine mechanische Kornverzahnung (*engl.* aggregate interlocking) der unebenen Rissufer eines aufgehenden Risses tritt bei UHPC nicht mehr in der Form auf wie bei Normalbeton. Die Rissausbreitung führt daher zu einem schlagartigen Versagen [BFW17].

Dieses wenig duktile Spannungs-Deformations-Verhalten macht den Werkstoff für die praktische Anwendung nahezu unbrauchbar. Erst die Kombination des ultrahochfesten Betons mit einer rissüberbrückenden Faserbewehrung, die ein verlangsamtes Bauteilversagen mit Vorankündigung sicherstellt, macht den als ultrahochfesten faserbewehrten Beton (*engl.* Ultra-High Performance Fibre-Reinforced Concrete, UHPFRC) bezeichneten Verbundwerkstoff baupraktisch interessant. Dabei kommt den Fasern als zusätzliche Komponente des Verbundwerkstoffes die Aufgabe zu, aufgehende Risse kraftschlüssig zu überbrücken und somit auch nach der Rissentstehung eine Kraftübertragung zwischen den Rissufern zu ermöglichen. Für diesen Zweck ist das Dehnungsvermögen ebenso wie die Zugfestigkeit der rissüberbrückenden Faser von Bedeutung. Ein maßgebender Einflussfaktor hinsichtlich der Wirksamkeit einer Faserbewehrung ist dabei das Verbundverhalten der Fasern in der Betonmatrix, vgl. Abschnitt 2.4. Darüber hinaus sind die Fasermenge, Faserverteilung und Faserorientierung weitere wichtige Kennwerte zur Charakterisierung eines Faserbetons [BFW11]. Sofern nicht durch spezielle Herstellungsverfahren gezielt beeinflusst, herrscht im Allgemeinen eine homogene Faserverteilung mit dreidimensionaler Faserorientierung vor, sodass das makroskalige Materialverhalten als näherungsweise isotrop betrachtet werden kann [BFW11]. Untersuchungen zeigen jedoch, dass herstellungsbedingt insbesondere im Bereich der Schalungsränder ein eher anisotropes Materialverhalten zu erwarten ist, da es zu einer transversal isotropen Ausrichtung der Fasern entsprechend der Betonierrichtung kommen kann, vgl. z. B. [CS07b], [RL20]. Abweichungen von der idealen Faserverteilung und -orientierung können beispielsweise im Rahmen der Erfassung der Faserwirksamkeit berücksichtigt werden, vgl. Kapitel 2.4.

Für die Anwendung in Faserbetonen eignen sich Fasern aus unterschiedlichen Werkstoffen, wie beispielsweise aus normal- oder hochfestem Stahl oder Edelstahl, Kohlenstoff, alkali-resistentem Glas, Polypropylen oder Polyvinylalkohol, sofern die Beständigkeit im alkalischen Milieu des Betons gegeben ist. Neben dieser Hauptvoraussetzung gibt es eine Reihe weiterer Kriterien, die die Eignung eines Faserwerkstoffes hinsichtlich seiner Funktionalität und Verwendbarkeit maßgeblich bestimmen, vgl. [BFW17], [KHDB02]. Je nach verwendetem Fasermaterial kann der erhärtete Faserbeton ein gegenüber unbewehrtem Beton verbessertes Riss- und Nachbruchverhalten oder Brandverhalten aufweisen oder sich durch eine optimierte und weniger schwindanfällige Mikrostruktur hinsichtlich seiner Wasserundurchlässigkeit sowie Schlag- und Abriebfestigkeit auszeichnen [BFW17]. Häufig kommen daher auch Kombinationen von Fasern verschiedener Werkstoffe oder Fasern unterschiedlicher Länge oder Geometrie, i. e. sogenannte Fasercocktails, zum Einsatz, um die für den Anwendungszweck gewünschten Eigenschaften zu optimieren. Als Faserverstärkung eines ultrahochfesten Betons kommen üblicherweise Fasern aus kaltgezogenem Walzdraht eines normal- oder häufig hochfesten Stahles oder Edelstahles zum Einsatz. Die erforderliche Faserlänge bemisst sich dabei üblicherweise in Abhängigkeit des Größtkorndurchmessers in der Betonmatrix, d. h. sie entspricht dem zwei- bis vierfachen



Durchmesser des Größtkorns sowie der zu überbrückenden Rissbreite und dem gewünschten Bruchverhalten des Verbundwerkstoffes [BFW17].

Insbesondere Feinkorn-UHPC werden daher Mikrostahlfasern zugesetzt. Diese können schon die bei der Erhärtung des Frischbetons entstehenden Schwind- und Zwangseigenspannungen, die aufgrund der Steifigkeits- und Festigkeitsunterschiede im Bereich der Kontaktzone (*engl.* interfacial transition zone, ITZ) zwischen Zementstein und Gesteinskörnung als Diskontinuitätsbereich auftreten, aufnehmen, somit die Spannungsverteilung vergleichmäßigen und die Entwicklung von Mikrorissen behindern. Damit wird einem Verlust der durch die Zugabe von Stahlfasern mit im Vergleich zu Beton hohem Elastizitätsmodul vergrößerten Steifigkeit vorgebeugt, was in Verbindung mit hohen Fasergehalten auch eine Steigerung der Zugfestigkeit zur Folge hat [BFW17].

Eine Riss- oder Bruchprozesszone (*engl.* fracture process zone, FPZ) als Wurzel eines aufgehenden Risses entsteht bei Belastungen im Bereich einer durch Kerben, Fehlstellen und Vorschädigungen in Form von Mikrorissen induzierten Schwachstelle im Gefüge [Leu07]. Je nach Rissöffnung beteiligen sich eine oder mehrere rissüberbrückende Fasern sowie die Resttragfähigkeit des mitwirkenden Betons zwischen den Rissufern (*engl.* tension stiffening) am Lastabtrag [BFW17]. Das Energieabsorptionsvermögen der beteiligten Fasern entscheidet schließlich darüber, ob infolge weiterer Laststeigerungen eine zunehmende Rissöffnung bis hin zur Bildung eines einzelnen Makrorisses erfolgt oder eine zusätzliche Rissprozesszone ausgebildet wird [Bäu02]. Wenn auch die Rissufer eines solchen Risses durch die zugesetzten Fasern (bei überkritischen Fasergehalten und/oder große Faserlängen) kraftschlüssig überbrückt werden können, können mehrere dieser makroskopischen Risse entstehen. Bei Laststeigerung leitet die weitere Öffnung der Makrorisse das bei Erreichen der Zugfestigkeit des schwächsten verbleibenden Querschnittes eintretende Bauteilversagen ein [Leu07].

Derjenige Fasergehalt, bei dem die vom Beton nicht mehr übertragbaren Zugspannungen in einem aufgehenden Makroriss gerade durch die rissüberbrückenden Fasern aufgenommen werden, wird als kritischer Fasergehalt bezeichnet. Anders als bei normalfestem Beton werden bei UHPC insbesondere aufgrund des verbesserten lokalen Verbundwiderstandes häufig bei annehmbarer Frischbeton-Verarbeitbarkeit überkritische Fasergehalte angestrebt. Neben der Steigerung der Zug- und Biegezugfestigkeit, welche sich experimentellen Untersuchungen zufolge, z. B. in [Spe08], auch auf die Drucktragfähigkeit positiv auswirkt sowie der zudem erhöhten Duktilität und des robusteren Nachbruchverhaltens wird bei als hochduktile bezeichneten Betonen mit überkritischen Fasergehalten eine Neigung zur Mehrfachrissbildung (nach JUNGWIRTH entsprechend ihrer faseraktivierenden Funktion als Mesorisse bezeichnet [Jun06]) anstelle der Ausbildung eines einzelnen lokalisierten Makrorisses beobachtet [BFW17]. Typische Rissverläufe weisen daher Verästelungen, Aufsplittungen und Versätze auf [Win98], [Leu07].

Die Zugtragfähigkeit des Verbundwerkstoffes wird bei ausreichend hohem Fasergehalt und homogener Faserverteilung durch den Verbund zwischen den Komponenten bestimmt [BFW17]. Hinsichtlich der Verbesserung des Nachbruchverhaltens wird dabei das Herausziehen der rissüberbrückenden Fasern angestrebt, das ein duktiles Versagen mit Vorankündigung sicherstellen soll. Unerwünscht ist dagegen das plötzliche Reißen der auf Zug beanspruchten benachbarten Fasern in einer schnell ablaufenden Kettenreaktion [Leu07]. Zur Erfassung der Zugtragfähigkeit auf Basis des Rissüberbrückungspotenzials durch die Fasern ist die genaue Kenntnis des Verbundverhaltens zwischen den beiden Werkstoffen Stahl und UHPC sowie das Verständnis des charakteristischen Auszugverhaltens der Fasern erforderlich [BS14]. Wesentliche Einfluss-

faktoren sind dabei die Oberflächenbeschaffenheit und Geometrie der Fasern sowie auch deren Dehnungsvermögen und Zugfestigkeit. Weitere den Verbundwiderstand beeinflussende Merkmale sind in Kapitel 3.4 aufgeführt. Ein detaillierter Überblick über das Material- und Tragverhalten von UHPFRC wird im folgenden Kapitel gegeben.

Obwohl der Verbundwerkstoff UHPFRC als High-Tech Material gegenüber normalfestem Stahlbeton bedingt durch die Verwendung hochwertiger Ausgangsstoffe, großer Fasermengen und durch aufwändigere Herstellungsprozesse vergleichsweise kostenintensiv ist, überwiegen für spezielle Anwendungsgebiete die signifikanten Vorteile hinsichtlich der Leistungsfähigkeit, Ressourceneffizienz und Dauerhaftigkeit [DAf08]. Oft wird dabei aus Gründen der Wirtschaftlichkeit auf eine Formgebung der beigemischten, häufig ohnehin hochfesten Fasern verzichtet, weshalb sich die Verwendung gerader Mikrostahtfasern mit glatter Oberfläche im Verbundwerkstoff UHPFRC durchgesetzt hat, vgl. auch Kapitel 2.4. Darüber hinaus sind weitere Ansätze wie das Vorspannen der Fasern durch Beeinflussung des Quellvermögens der UHPC-Matrix, eine gezielte Wärmebehandlung und die effiziente Kombination von Faserbewehrung und konventioneller Bewehrung mit Stabstahl oder mit einer Vorspannung durch Spannstahl derzeit Gegenstand der Forschung [BFW17].

## 2.2 Material- und Tragverhalten

Das Materialverhalten eines Faserverbundwerkstoffes ist wesentlich durch das Zusammenwirken seiner Komponenten geprägt. Im Allgemeinen werden drei Phasen unterschieden. Im Initialzustand nach der Fertigung des Komposits beteiligen sich die Komponenten entsprechend ihrer Steifigkeit und ihrem Volumenanteil gleichermaßen am Lastabtrag. Bei Überschreitung der Verbundfestigkeit beginnt die Ablösung der Fasern von der Matrix und schließlich werden Relativverschiebungen zwischen den Komponenten generiert, die die Makrorissbildung des Verbundwerkstoffes einleiten.

Entscheidend für die Erschließung neuer Anwendungsgebiete für den Hochleistungswerkstoff UHPFRC ist das Tragverhalten in komplexen Beanspruchungssituationen, vgl. Kapitel 2.1. Beispielsweise erfahren schlanke Stützen häufig schon infolge von material- und herstellungsbedingten Imperfektionen eine zusätzliche Biegebeanspruchung, während gedrungene Bauteile vergleichsweise unempfindlich gegenüber den genannten Abweichungen sind. Die Entwicklung des UHPFRCs zielt daher vor allem auch auf die Verbesserung des Zugtragverhaltens von Kompositwerkstoffen ab. Im Folgenden wird das Materialverhalten unter statischen Zug- und Druckbeanspruchungen sowie unter Ermüdungsbeanspruchung zusammenfassend vorgestellt.

### 2.2.1 Zugtragverhalten

Ultrahochfester Beton ist ein für die Aufnahme extrem großer Druckbeanspruchungen prädestinierter Werkstoff, der nur in Verbindung mit einer Komponente für die Aufnahme von Zugbeanspruchungen, wie beispielsweise Bewehrung oder Ummantelung, für komplexe Beanspruchungssituationen geeignet ist. Insbesondere das Zugtragverhalten wird durch die Bewehrung mit überkritischen Fasergehalten in erheblichem Maße beeinflusst, vgl. Abbildung 2.1. In ihrem charakteristischen Zugtragverhalten unterscheiden sich Grobkorn- und Feinkornbetone unabhängig von der Faserzugabe nur unwesentlich voneinander, daher wird üblicherweise auf eine Differenzierung verzichtet [DAf08]. Allerdings gilt die Festigkeit des Zementsteins unter

anderem durch die Faserzugabe als so gesteigert, dass insbesondere bei Grobkorn-UHPC entstehende Risspfade in Richtung der Korngrenzen verschoben werden, was mit einer reduzierten Bruchfestigkeit einhergeht [BFW17].

Das in Abbildung 2.1 schematisch dargestellte einaxiale Zugtragverhalten von ultrahochfestem Faserbeton und unbewehrtem UHPC fasst die Modellvorstellungen und aus experimentellen Untersuchungen heraus entwickelten Beschreibungsansätze aus der Literatur zusammen, vgl. beispielsweise [DAf08], [Leu07], [Jun06], [Naa03]. Mit der Betrachtung des Werkstoffes als Kontinuum kann die Deformation des Materials unter einer Zugbeanspruchung verschmiert als Dehnung beschrieben werden, die sowohl die Dehnung der Betonmatrix als auch eine Rissöffnung mit rissüberbrückenden Fasern einschließt, bis schließlich das plötzliche Versagen einsetzt.

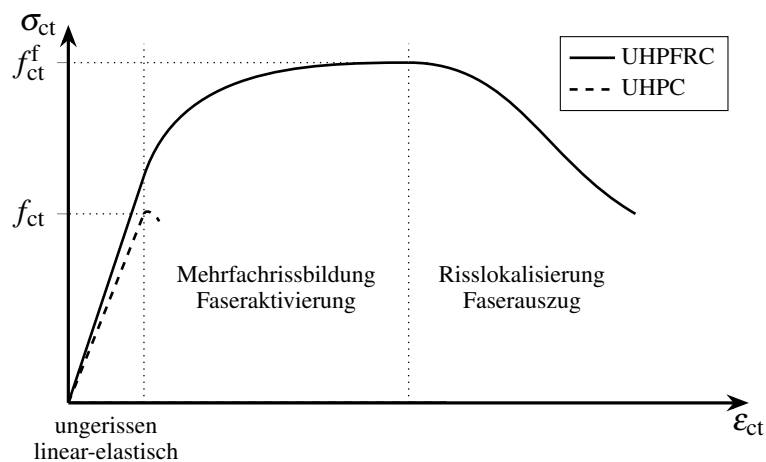


Abbildung 2.1: Charakteristisches einaxiales Zugspannungs-Dehnungs-Verhalten von UHPC und UHPFRC mit überkritischem Fasergehalt

Die charakteristische Zugfestigkeit eines unbewehrten, ultrahochfesten Betons wird entscheidend durch die Inhomogenität des Werkstoffes und herstellungsbedingte Fehlstellen oder Mikrorisse bestimmt und ist somit zum Teil signifikanten Streuungen unterworfen. Die bei zunächst linear-elastischem Materialverhalten entstehenden Rissprozesszonen führen schnell und ohne ausgeprägte Dehnungen des Materials zur Ausbildung eines Trennrisses, der schließlich das Zugversagen des schwächsten Querschnittes markiert, vgl. Abbildung 2.1, gestrichelte Linie.

Im Gegensatz dazu weist das charakteristische Zugtragverhalten von überkritisch faserbewehrtem, ultrahochfesten Beton, dargestellt mit durchgezogener Linie in Abbildung 2.1, drei Phasen mit jeweils unterschiedlicher Beteiligung der Matrix und der Fasern am Lastabtrag auf, vgl. [Leu07], [Naa03]. Der ungerissene Werkstoff verhält sich zunächst linear-elastisch, wobei die Dehnungen mit einem geringfügig vergrößerten Elastizitätsmodul proportional zu den Zugspannungen wachsen und die Fasern sich entsprechend ihrer Dehnsteifigkeit im Verhältnis zur Gesamtsteifigkeit des Werkstoffes am Lastabtrag beteiligen, vgl. Kapitel 2.3. Mit Ausbildung einer ersten Rissprozesszone durch das Zusammenwachsen von Mikrorissen im Bereich von Gefügeschwachstellen beginnt die zweite Phase des Zugtragverhaltens, die eine Abrundung des linear-elastischen Pfades repräsentiert [Leu07]. Durch die kraftschlüssige Verbindung der Rissufer mithilfe der Fasern, die schon bei geringen Rissöffnungen zunehmend aktiviert werden, führt anstelle der bei normalfestem Faserbeton typischen Entfestigung vor der Faseraktivierung

aufgrund des hohen Fasergehaltes eine Verfestigung des Materials zur Möglichkeit weiterer Laststeigerungen [Jun06], vgl. Kapitel 3.

Der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Linie in der Faseraktivierungsphase ist abhängig vom Fasergehalt und der Faserverteilung, die natürlichen Streuungen unterliegt. Die Bildung weiterer Rissprozesszonen und das simultane Vernähen von Messorissen durch kraftübertragende Faserbrücken im Rahmen der Mehrfachrissbildung prägen das wachsende Rissbild und die Charakteristik des durch die Verfestigung noch ansteigenden Astes in der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie mit wiederkehrender Abfolge von Spannungssteigerung und -abfall durch Rissöffnungen. Erst mit der Lokalisierung und Öffnung eines Makrorisses setzt die entfestigende dritte Phase ein. Das duktile Versagen wird durch den allmählichen Auszug der den sich öffnenden Makroriss überbrückenden Fasern bestimmt und hängt damit maßgeblich vom Verbundverhalten zwischen Faseroberfläche und der umgebenden Betonmatrix ab. Bei Überschreitung der Zugfestigkeit des schwächsten verbleibenden Querschnittes versagt die Struktur schließlich durch Ausbildung eines Trennrisses [Leu07]. Die Ausprägung des abfallenden Astes ist dabei wie das Verfestigungspotenzial von Fasergehalt, Faserverteilung und den dadurch bedingten Streuungen der Zugfestigkeit abhängig. In Abbildung 2.1 ist ein typischer Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie ohne Berücksichtigung von Streubereichen dargestellt, vgl. [DAf08].

### 2.2.2 Drucktragverhalten

Das durch die Faserbewehrung direkt veränderte Tragverhalten unter zentrischen Zugbeanspruchungen spiegelt sich auch im Materialverhalten unter Druck-, Biege- oder Torsionsbeanspruchung wider, vgl. beispielsweise [DAf08], [FST<sup>+</sup>05]. Die folgende Abbildung 2.2 zeigt das Tragverhalten unter einer einaxialen Druckbeanspruchung von unbewehrtem UHPC und UHPFRC im Vergleich, welches für den vorbestimmten Einsatz von ultrahochfestem Beton in druckbeanspruchten Bauteilen essenziell ist. In Abbildung 2.2 wird analog zu Abbildung 2.1 auf eine Differenzierung von Grob- und Feinkorn-UHPC verzichtet.

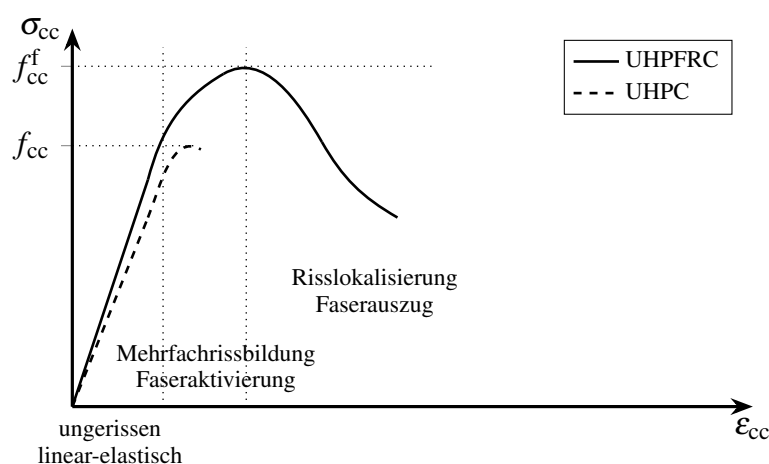


Abbildung 2.2: Charakteristisches einaxiales Druckspannungs-Stauchungs-Verhalten von UHPC und UHPFRC mit überkritischem Fasergehalt

Nach RIEDEL & LEUTBECHER ist die Druckfestigkeit signifikant abhängig von der Faserverteilung und -orientierung, sofern infolge der Herstellung anisotropes Materialverhalten zu erwarten

ist [RL20]. Eine Abhängigkeit des Drucktragverhaltens von einer lokalen Anisotropie innerhalb der Struktur ist hingegen nicht bekannt.

Der Einsatz von hochfestem Stahl, der gekennzeichnet ist durch ein großes elastisches Dehnpotenzial und ein fehlendes Fließplateau, ist nach JUNGWIRTH für die Anwendung beim Verbundwerkstoff UHPFRC zu empfehlen [Jun06]. Während die Zugfestigkeit hochfester Stahlfasern ein Vielfaches der Zugtragfähigkeit von unbewehrtem UHPC beträgt, kann den Fasern im Allgemeinen aufgrund ihrer Schlankheit keine Drucktragfähigkeit zugesprochen werden. Bis zu einer Beanspruchung von 70 bis 80 % der Druckfestigkeit verhält sich der ungerissene, ultrahochfeste Beton linear-elastisch (normalfester Beton bis ungefähr 50% der Druckfestigkeit) und weist keinen signifikanten Einfluss durch die Faserbewehrung auf [DAf08]. Erst bei weiterer Laststeigerung werden infolge einer einsetzenden Mikrorissbildung Querdehnungen messbar und die rissüberbrückenden Fasern aktiviert. Unbewehrter UHPC versagt bei Erreichen der Druckfestigkeit schließlich explosionsartig [DAf08]. In Abhängigkeit des Fasergehaltes und der Faserverteilung kann das explosive Versagen bei UHPFRC verhindert werden, da die Fasern die auftretenden Querspannungen aufnehmen und die Ausbildung des Rissbildes verzögern, bis bei Erreichen der Querspannung in einem lokalisierenden Makroriss der Faserauszug erfolgt. Aufgrund dieser Effekte kann durch die Faserzugabe die Druckfestigkeit von UHPC geringfügig gesteigert werden.

Das Nachbruchverhalten bei Druckbeanspruchungen weist so wie auch das Zugtragverhalten eine infolge der Faserbewehrung signifikant verbesserte Robustheit auf. Ähnliche Effekte sind auch beim Biegetragverhalten infolge der vergrößerten Biegezugfestigkeit und beim Tragverhalten unter Torsionsbeanspruchung zu beobachten. Maßgebend für die Charakteristik des Nachbruchverhaltens ist das Faserauszugverhalten. Wie auch die Faseraktivierung hängt das Auszugverhalten von der Homogenität der Faserverteilung, der Faserausrichtung und dem Fasergehalt ab. Insbesondere bei ungerichteter Faserorientierung sind Rückschlüsse auf das Auszugverhalten oder Verbundverhalten allein auf Basis des Zugtragverhaltens nicht möglich, vgl. Kapitel 3.1 und 6.3. Die gegenseitige Beeinflussung benachbarter Fasern beeinträchtigt die potenzielle Fasertragwirkung ebenso wie Imperfektionen im Betongefüge und ungleichmäßige Abstände zwischen rissüberbrückenden Fasern. Kriterien zur Bewertung der Faserwirksamkeit sowie Ansätze aus der Literatur werden in Kapitel 2.4 gegeben.

### 2.2.3 Ermüdungsverhalten

Die der Betonermüdung zugrunde liegenden Schädigungsphänomene sind bislang nicht abschließend geklärt [Hee17]. Die Art der am Ermüdungsvorgang beteiligten Schädigungsmechanismen ist nach bisherigen Erkenntnissen bei normalfestem und hoch- oder ultrahochfestem Beton vergleichbar [Fit12]. Charakteristische Ermüdungsphänomene sind die sukzessive Zerstörung des Verbundes zwischen Matrix und Zuschlägen sowie die Fortpflanzung und Aufweitung der schwind- und lastinduzierten Mikrorisse zu Makrorissen.

In der folgenden Abbildung 2.3 ist die qualitative Verformung von unbewehrten Betonquerschnitten verschiedener Festigkeiten infolge einer Ermüdungsschädigung über die bezogenen Lastwechsel dargestellt. Nach dem grundsätzlich wie bei Normalbeton (*engl.* normal strength concrete, NSC) und hochfestem Beton (*engl.* high strength concrete, HSC) auftretenden dreiphasigen Ermüdungsverhalten mit der Rissentstehung (Phase I), dem stabilen Rissfortschritt (Phase II) sowie dem instabilen und progressiven Risswachstum (Phase III) versagt der zugbeanspruchte

Querschnittsbereich eines ultrahochfesten Betons (*engl.* ultra-high strength concrete, UHSC) schlagartig mit der Bildung eines Trennrisses [Fit12], [FST<sup>+</sup>05].

Dabei fallen die Ermüdungsdehnung und die messbare Verschiebung  $\delta$  infolge einer Verkürzung der instabilen Rissentwicklungsphasen I und III sowie durch den flacheren Verlauf der stabilen Ermüdungsphase II insgesamt geringer aus [Thi16], [Fit12], vgl. Abbildung 2.3. Die gleichförmige Ermüdung in Phase II ist dabei auch durch das zeitabhängige Verformungsverhalten, i. e. Kriechen und Relaxation, und die Festigkeitssteigerung und Steifigkeitsänderung infolge der Nacherhärtung des Zementsteins geprägt, sodass aufgrund von irreversiblen oder verzögerten viskosen Verformungen das Mikrogefüge bei sich öffnenden und schließenden Mikrorissen gelockert und schließlich geschädigt wird [Fit12], [Thi16]. Das Auftreten von mikroskaligen Gefügeveränderungen wie etwa einer Verfestigung des Zementsteins in direkter Rissumgebung ist derzeit Gegenstand der Forschung, vgl. [SRRSD19].

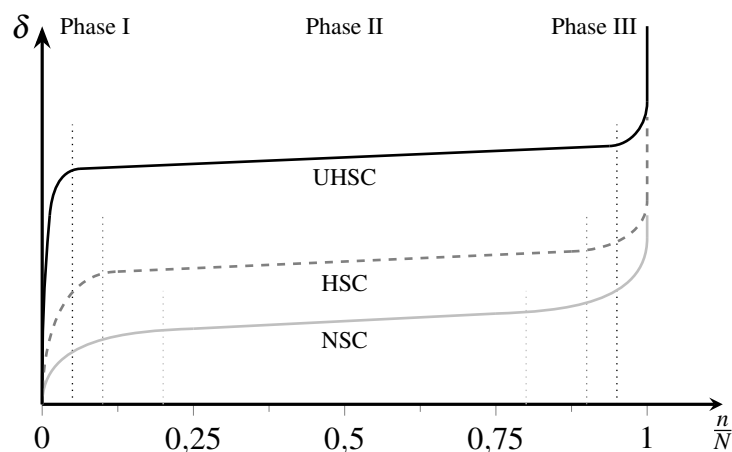


Abbildung 2.3: Qualitative Verformung durch von Ermüdungsschädigung über Lastwechsel für unbewehrten Beton mit verschiedenen Festigkeiten nach [Fit12]

Experimentelle Untersuchungen zum Tragverhalten von UHPFRC unter Ermüdungsbeanspruchungen liegen bislang nur in begrenztem Umfang vor und unterliegen analog zum unbewehrten Beton aufgrund der ausgeprägten Heterogenität des Gefüges und der daraus resultierenden Anisotropie der Materialeigenschaften häufig signifikanten Streuungen. Einen Überblick über die Erkenntnisse zur Ermüdung von normalfestem Beton mit und ohne Faserbewehrung geben LEE & BARR [LB04]. Sie diskutieren verschiedene, zum Teil widerstrebende Auswirkungen der Faserbewehrung auf das Ermüdungsverhalten des Betons. Einerseits kann die Beimischung von Fasern die Verteilung und Dichte von Poren und Fehlstellen im Gefüge ungünstig beeinflussen; andererseits wirkt sich das rissüberbrückende und -bremsende sowie energiedissipierende Verhalten der Fasern günstig auf das Ermüdungsverhalten des Verbundwerkstoffes aus [LB04]. Diese positiven Effekte werden insbesondere in zugbeanspruchten Querschnittsbereichen bei Biegeversuchen und vornehmlich während der ersten etwa 100 Zyklen der Ermüdungsbeanspruchung, d. h. im Bereich von Low-Cycle-Fatigue, beobachtet [LB04]. Darüber hinaus ist in experimentellen Untersuchungen häufig keine signifikante Verbesserung der Ermüdungsfestigkeit durch die Faserbewehrung festgestellt worden [LB04].

Untersuchungen zum Ermüdungsverhalten von schnell erhärtendem, faserbewehrten Beton sind von NAAMAN & HAMMOUD an ungekerbten Vier-Punkt-Biegezugversuchen durchgeführt wor-

den. Sie geben Hinweise darauf, dass im Vergleich zu unbewehrten Betonproben durch die Faserzugabe trotz möglicher Vorschädigungen insgesamt eine Verbesserung der Ermüdungsfestigkeit zu erwarten ist [NH98]. LAPPA untersucht das Biegetragverhalten von hochfestem Faserbeton unter statischer und zyklischer Beanspruchung und hebt die besondere Bedeutung des Verbundverhaltens zwischen Fasern und Matrix für das Ermüdungsverhalten hervor [Lap07]. In experimentellen Untersuchungen von UHPFRC unter zyklischen Zugbeanspruchungen beobachten MAKITA & BRÜHWILER an der Bruchfläche zusätzliche, durch Fasern hervorgerufene Schädigungsphänomene wie etwa Matrixabplatzungen und -vermahlungen bei geneigten, rissüberbrückenden Fasern sowie eine verstärkte Abrasion von Faser und Matrix im Bereich des Faseraustrittsortes infolge von wechselnden Relativverschiebungen [MB14]. Durch Spannungumlagerungen zwischen Materialbereichen mit ungleicher Faserverteilung und Tragkapazität verbessert danach das Ermüdungsverhalten [MB14].

Die ertragbare Lastspielzahl einer Ermüdungsbeanspruchung in Abhängigkeit des Spannungsniveaus und der Spannungsamplitude erlaubt die Abschätzung der Schwingfestigkeit eines Baustoffes. In logarithmischer Darstellung der Wöhlerlinie ist üblicherweise bei Bereichen mit nahezu konstanter Neigung die Abgrenzung charakteristischer Kennwerte wie der Kurzzeitfestigkeit, der Zeitfestigkeit und der Dauerschwingfestigkeit voneinander möglich. Für Beton kann nach bisherigen Forschungsergebnissen nur die Abschätzung der Ermüdungsfestigkeit im Zeitbereich erfolgen, wobei in halblogarithmischer Darstellung die Lastwechselzahl  $N$  für bestimmte Ober- und Unterspannungen abgelesen werden kann [KK02], [Fit12].

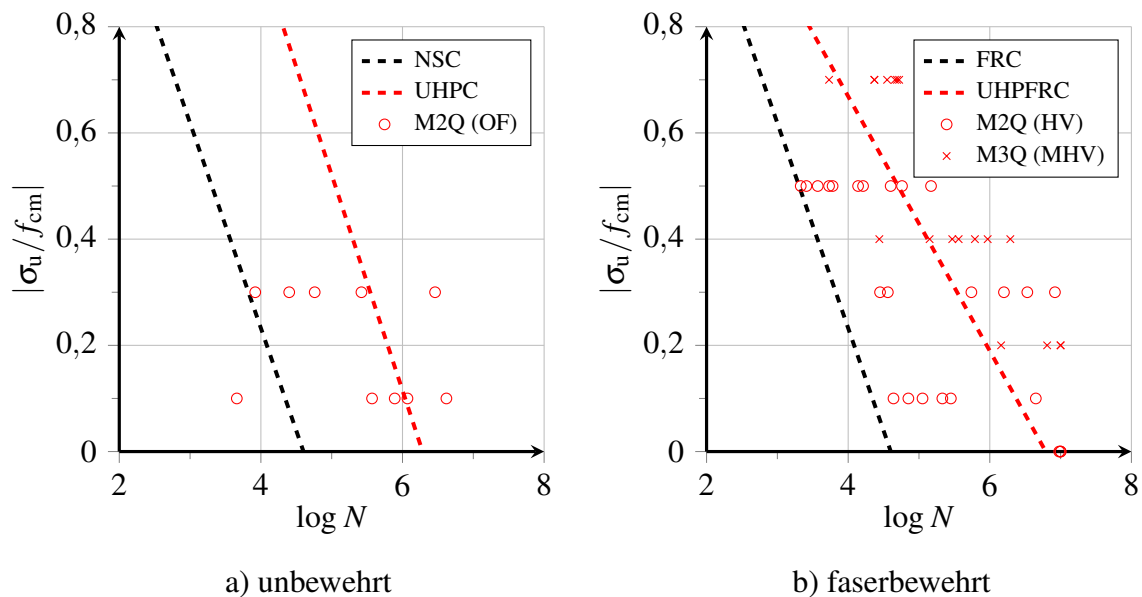


Abbildung 2.4: Wöhlerlinien mit Anteilsbereichen für  $\sigma_o/f_{ctm} = 0,6$  von unbewehrtem und stahlfaserbewehrtem, normal- und ultrahochfesten Beton nach [Fit12]

Die obenstehende Abbildung 2.4 von FITIK zeigt die Wöhlerlinie für die auf die mittlere Betonzugfestigkeit  $f_{ctm}$  bezogene Oberspannung  $\sigma_o/f_{ctm} = 0,6$  für einen ultrahochfesten Beton mit und ohne Stahlfasern in Abhängigkeit des Absolutwertes der auf die mittlere Zylinderdruckfestigkeit  $f_{cm}$  bezogenen Unterspannung  $|\sigma_u/f_{cm}|$  bei einer Zug-Druck-Wechselbeanspruchung [Fit12]. Zum Vergleich sind außerdem Wöhlerlinien für normalfesten Beton in schwarz dargestellt. Während der Einfluss der Stahlfasern auf die Ermüdungsfestigkeit bei Wechselbeanspru-

chung scheinbar gering ist, ist insgesamt eine vergrößerte Neigung der Regressionsgeraden zu erkennen [Fit12].

Experimentelle Untersuchungen von WEFER bzgl. der Auswirkungen einer Faserverstärkung auf das Ermüdungsverhalten von UHPC unter einer Druckschwellbeanspruchung zeigen ebenfalls keine signifikante Beeinflussung der Ermüdungsfestigkeit, lassen allerdings den Rückschluss zu, dass bei UHPC der Mechanismus der Rissinitiierung durch Fasern gegenüber der Rissüberbrückung dominiert [Wef10]. FITIK stellt bei wechselnder Druck- und Zugbeanspruchung im Vergleich zu Zug- oder Druckschwellbeanspruchungen eine Beschleunigung des Schädigungsfortschrittes fest, verursacht durch die unterschiedliche Orientierung der entstehenden Mikrorisse, auftretenden Kerbspannungen im Bereich der Risswurzeln sowie durch Druckbeanspruchungen bei behinderter Risschließung infolge von Gefügelockerungen [Fit12].

Untersuchungen der Schädigungsentwicklung von UHPFRC unter zyklischer Beanspruchung sind von KRAHL ET AL. veröffentlicht worden [KCE18]. Die Untersuchungsreihe umfasst zyklische Zug-, Biegezug- und Druckversuche an jeweils typischen Versuchskörpern aus UHPFRC, i. e. Zugknochen, Balkenprisma oder Druckzylinder [KCE18]. Ergebnisse der weggesteuerten Versuchsdurchführung für zugschwellbeanspruchte Probekörper mit unterschiedlichen Fasergehalten sind beispielhaft in Abbildung 2.5 dargestellt. Weitere Ergebnisse zu Ermüdungsversuchen unter Druckschwell- und Biegezugbeanspruchungen sind den genannten Literaturstellen zu entnehmen, vgl. [KCE18], [KGC19].

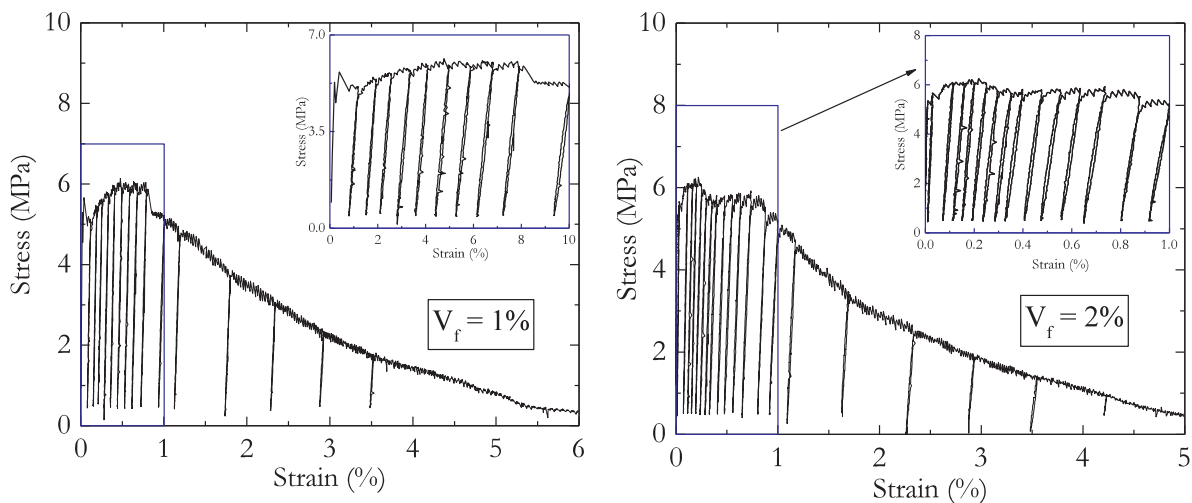


Abbildung 2.5: Experimentell ermittelte Spannungs-Dehnungs-Linien für UHPFRC mit verschiedenen Fasergehalten unter zyklischer Zugbeanspruchung aus [KCE18]

Aus den in Abbildung 2.5 dargestellten Ergebnissen können direkt Rückschlüsse auf die Fasertragwirkung im Zugbereich abgeleitet werden. Mithilfe von Messungen der reversiblen und bleibenden Dehnungen bei Be- und Entlastung wird dazu auf den Elastizitätsmodul  $E_c$  des geschädigten Materials geschlossen. In Abbildung 2.6 ist die Schädigungsvariable  $d_t$ , die nach dem Prinzip der Dehnungsäquivalenz über die Degradation der Steifigkeit im Bezug auf den initialen Elastizitätsmodul  $E_{c0}$  mit

$$d_t = 1 - \frac{E_c}{E_{c0}} \quad (2.1)$$



berechnet wird, für zwei verschiedene Faserbetone mit Fasergehalten von  $V_f = 1 \text{ Vol.}\%$  und  $V_f = 2 \text{ Vol.}\%$  über die im Prüfbereich gemessene Dehnung dargestellt [KCE18].

KRAHL ET AL. unterscheiden drei Ermüdungsphasen, i. e. die nahezu linear-elastische Phase mit ersten sichtbaren Rissen, die anschließende Multirissbildung und Verfestigung sowie schließlich mit einsetzender Makrorissbildung und -öffnung die Faserauszugphase [KCE18]. In Abbildung 2.6 sind die ermittelten Werte der Schädigungsvariablen  $d_t$  an den Übergängen zwischen diesen Phasen für dieselben Faserbetone wie in Abbildung 2.5 angezeichnet. Im Vergleich der Ergebnisse mit den unterschiedlichen Fasergehalten wird die zunächst verstärkte Schädigungsentwicklung bei hohem Fasergehalt auf den erhöhten Volumenanteil an geschwächten Bereichen, u. a. Poren, Fehlstellen und die Kontaktzonen der Materialkomponenten zurückgeführt, während der verlangsamte Schädigungszuwachs in Phase II auf die rissüberbrückende Wirkung der Fasern schließen lässt und die positive Wirkung höherer Fasergehalte zeigt [KCE18].

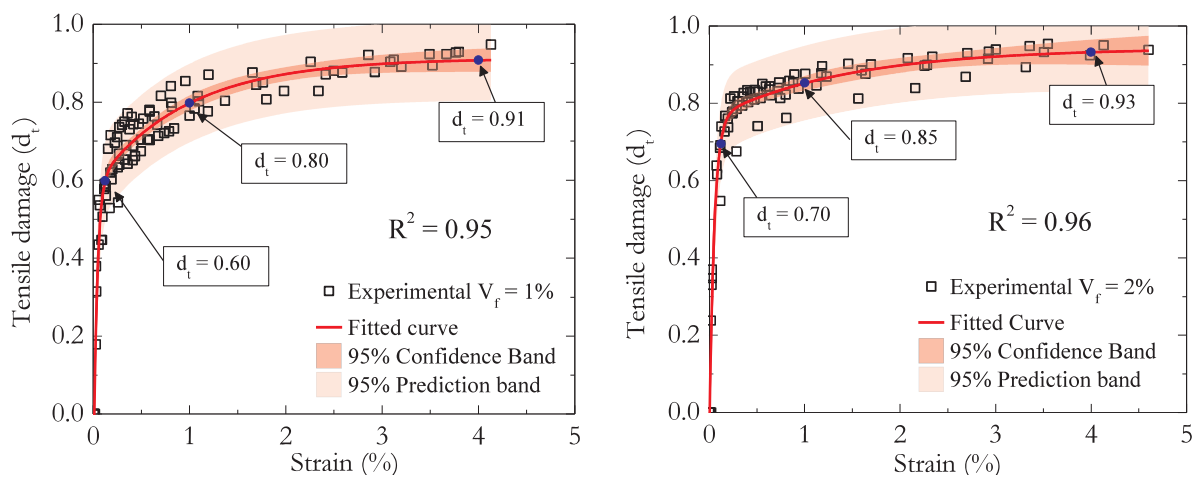


Abbildung 2.6: Experimentell ermittelte Schädigungsentwicklung bei UHPFRC mit verschiedenen Fasergehalten unter zyklischer Zugbeanspruchung aus [KCE18]

Durch den Zusatz von Fasern kann analog zum statischen Tragverhalten auch bei Ermüdungsbeanspruchung eine rissbremsende Wirkung entfaltet werden, die mit einem geringeren Steifigkeitsverlust infolge der Gefügelockerung einhergeht [Fit12]. Beeinflusst wird das Ermüdungsverhalten von UHPFRC neben den auch für das statische Tragverhalten maßgebenden Einflussparametern, wie beispielsweise die Geometrie, Menge und Orientierung der verwendeten Fasern, vor allem durch die Art, Höhe und Frequenz der wiederholten Beanspruchung. Weiterhin werden feuchte- und wärmeinduzierte Ermüdungsphänomene bei UHPC beobachtet [Thi16], [Hoh04]. So behindert das dichte und kapillarporenarme Gefüge Spannungsumlagerungen durch den Transport von Porenwasser oder Wasserdampf, vgl. [TO19], [DTS19].

Bei entsprechend großer Rissöffnung kann während einer erneuten Risschließung im ungünstigen Fall auch eine Schädigung der Faser durch Knicken oder eine Zerstörung der Betonoberfläche im Riss durch anstoßende Faserspitzen oder knickende Fasern auftreten. Das Ermüdungsversagen von Faserbetonen im Zugbereich ist wie bei statischer Beanspruchung durch den fortschreitenden Faserauszug im Makroriss gekennzeichnet, wobei die verbleibende Lebensdauer eines gerissenen Faserbetons durch die Verbundermüdung signifikant reduziert wird [Fit12]. Auf die Ermüdung des Verbundes zwischen Stahlfasern und der ultrahochfesten Betonmatrix wird in Kapitel 3.5 näher eingegangen.

## 2.3 Materialmodelle und Bemessungsansätze

Die geplante neue DAfStb-Richtlinie für ultrahochfesten Beton mit und ohne Faserverstärkung wird sowohl Anforderungen und Toleranzen für wesentliche Materialkennwerte definieren als auch Modelle für die Bemessung in der Tragwerksplanung festlegen [DAf08]. Insbesondere die Entwicklung eines ausgewogenen Bemessungskonzeptes, das ausreichende Sicherheit mit möglichst optimaler Wirtschaftlichkeit in Verbindung bringt, ist derzeit Bestandteil von regen Fachdiskussionen. So sind bereits eine ganze Reihe von Modellansätzen in der Literatur vorhanden. Die grundsätzlichen Konzepte für die Erfassung der Fasertragwirkung werden in diesem Kapitel vorgestellt.

Im Hinblick auf das Tragverhalten von faserverstärktem UHPC stellt die Erfassung und Berücksichtigung der Fasertragwirkung die Kernfragestellung dar. Anders als normalfester Stahlfaserbeton weist UHPFRC nach der Erstrissbildung ein verfestigendes Materialverhalten auf, das signifikant für die Ausnutzung des Leistungspotenzials dieses Faserverbundwerkstoffes ist. Demgegenüber verlangt die herstellungs- und materialbedingte Inhomogenität des Faserverbundwerkstoffes eine hinreichende Sicherheit im Bezug auf tragfähigkeitsrelevante Streuungen. Dem aktuellen Forschungsstand entsprechend werden ergänzend zu den vorliegenden Bemessungskonzepten am Ende dieses Kapitels empirisch hergeleitete Ansätze zur Erfassung der Faserwirksamkeit dargelegt.

### 2.3.1 Modellierungskonzepte

Die Beschreibung des mechanischen Materialverhaltens des Faserverbundwerkstoffes UHPFRC kann auf drei Ebenen erfolgen, wobei die detaillierte Auflösung des Mikrogefüges im Zementstein aufgrund des Skalenunterschiedes zu den betrachteten Stahlfasern nicht dazu gezählt wird [KHDB02]. Im Rahmen der Materialwissenschaften ist die Modellbildung auf der Ebene des Mesgefüges entweder mit diskret aufgelösten Zuschlagskörnern, umgebender Zementmatrix und Kontaktzonen oder verschmiert mit als homogen betrachteter Betonmatrix für spezielle numerische Untersuchungen hinsichtlich des Verständnisses des Materialverhaltens von Interesse, vgl. Kapitel 3. Für die baupraktische Bemessung von UHPFRC-Bauteilen im Rahmen der Tragwerksanalyse eignen sich dagegen Modellansätze auf der Makroebene besser [KHDB02]. Während die Modellierung von normalfestem Stahlfaserbeton in der Regel den Entfestigungsbereich im Spannungs-Deformations-Verhalten erfasst, ist bei ultrahochfestem Faserbeton sowohl verfestigendes als auch entfestigendes Materialverhalten (*engl.* strain-hardening behaviour, strain-softening behaviour) zu beschreiben, vgl. z. B. [AFG13], [Leu07], [OE15].

Die Erfassung der werkstofftypischen Ver- und Entfestigung unter Zugbeanspruchung mit Aktivierung der Faserverstärkung kann dabei unter Verwendung diskreter oder verschmierter Rissmodelle der nichtlinearen Bruchmechanik erfolgen. Dabei wird das Nachbruchverhalten mithilfe von Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen charakterisiert. Als dritte Möglichkeit kommt die Bestimmung einer verallgemeinernden Spannungs-Dehnungs-Kennlinie infrage, welche die Bemessung von Strukturen aus UHPFRC in der Baupraxis stark vereinfachen. Nach SLOWIK unterscheiden sich die beschriebenen Vorgehensweisen hinsichtlich ihres Modellierungs- und Berechnungsaufwandes, aber auch in der numerischen Genauigkeit durch die Abhängigkeit von speziellen Modellparametern und der gewählten Diskretisierung in dreidimensionalen numerischen Modellen [KHDB02].

Entsprechend der Einteilung des charakteristischen Zugtragverhaltens von Faserbeton in drei sukzessiv ablaufende Phasen, vgl. Abbildung 2.1, orientiert sich die Modellierung häufig an unterschiedlichen Konzepten für den ungerissenen und den gerissenen Zustand des Faserbetons. Die Beschreibung des Materialverhaltens des ungerissenen Verbundwerkstoffes kann kontinuumsmechanisch und unter Ausschluss von Relativverschiebungen zwischen den Oberflächen der Komponenten Matrix und Fasern erfolgen. Dahingegen ist eine verschmierte Betrachtung der infolge von Mikrorissbildung und schließlich Risslokalisierung auftretenden Spannungs- und Dehnungsverteilung im Rahmen der Kontinuumsmechanik nur näherungsweise und bei Bestimmung einer Bezugslänge, die eine Umrechnung zwischen Rissöffnung und äquivalenter Dehnung erlaubt, möglich.

Der ungerissene Faserbeton weist ein näherungsweise linear-elastisches Spannungs-Deformations-Verhalten auf. Die Elastizitätsgrenze des ultrahochfesten, faserbewehrten Betons repräsentiert dabei die Erstrissbildung der Matrix, d. h. das Ende des Zustandes I, und ist bei hohen Fasergehalten als Folge der Versteifung des Materials geringfügig größer als die Erstrisszugfestigkeit des unbewehrten UHPCs. Als charakteristische Größe wird diese Zugfestigkeit in Frankreich als elastische Grenzfestigkeit  $f_{ct,el}$  (*frz.* résistance limite élastique, *engl.* elastic strength) bezeichnet [AFG13], während in Deutschland die Bezeichnung Rissspannung  $\sigma_{cf,cr}$  des ideellen Querschnittes [DAf08], [LF09] oder auch seltener Proportionalitätsgrenze oder näherungsweise Matrixzugfestigkeit  $f_{ct}$  [fib13], [OME19] gebräuchlich ist. Dabei wird im MODEL CODE 1990 und 2010 für den elastischen Bereich ein bilinearer Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie mit Knick bei  $\sigma_{ct} = 0,9 \cdot f_{ct}$  angegeben [fib13], [fib93].

Im ungerissenen Zustand I beteiligen sich Fasern und Matrix entsprechend ihren Dehnsteifigkeiten  $E_f$  und  $E_m$  sowie ihrer Volumenanteile  $V_f$  und  $V_m = 1 - V_f$  am Lastabtrag [Har86], [BFW17]. Unter der Voraussetzung linear-elastischen Materialverhaltens beider Komponenten und idealen, starren Verbundes lassen sich die Traganteile von Fasern und Matrix bei Anwendung des „Composite-Concept“ (CC) addieren, sodass die Zugspannung des Komposits  $\sigma_{ges}$  in Abhängigkeit der Dehnung  $\epsilon_{ges}$  als

$$\sigma_{ges} = (E_f \cdot V_f + E_m \cdot (1 - V_f)) \cdot \epsilon_{ges} \quad (2.2)$$

angeben, vgl. [BFW10], [Har86]. Nach REINHARDT ist die zufällige Faserorientierung bei homogener, isotroper Faserverteilung durch den Abminderungsfaktor  $\eta = 0,5$  für die Fasertragwirkung zu berücksichtigen [BFW10]. HARTWICH schlägt einen Orientierungseinflussfaktor  $\eta_o$  zur Berücksichtigung der Abweichung der Faserausrichtung von der Beanspruchungsrichtung, mit Werten zwischen 1,0 für eindimensionale Ausrichtung der Fasern und 0,2 bei zufälliger, dreidimensionaler Faserorientierung sowie einen Längeneinflussfaktor  $\eta_\ell$  zur Erfassung der abweichenden Faserspannung in Fasern unterschiedlicher Länge mit üblichen Werten zwischen 0,8 und 1,0 vor [Har86]. Die Rissspannung bei Erstrissbildung, i. e. wenn die Matrixspannung  $\sigma_m$  die Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$  erreicht und das stabile Mikrorisswachstum einsetzt, nimmt demzufolge im Vergleich zur unbewehrten Betonmatrix um den Faktor  $\gamma$  mit

$$\gamma = 1 + V_f \cdot \left( \eta \cdot \frac{E_f}{E_m} - 1 \right) \quad (2.3)$$

zu, wobei HARTWICH entsprechend  $\eta = \eta_o \cdot \eta_\ell$  in die oben stehende Gleichung (2.3) einzusetzen wäre [Har86], [BFW10]. Nach HARTWICH fällt der Beginn der Rissbildung nicht mit dem Zugversagen des Werkstoffes zusammen. Die Faserbetonzugfestigkeit, d. h. die maximal

übertragbare Zugspannung, wird erst im gerissenen Querschnitt, i. e. Zustand II, erreicht und kann daher nicht mit dem „Composite-Concept“ beschrieben werden.

Alternativ zum „Composite-Concept“ wird in der Literatur auch mithilfe des „Spacing-Concept“ (SC), das aus der Bruchmechanik abgeleitet ist, versucht, die Verstärkungswirkung von Stahlfasern im Beton theoretisch zu beschreiben [Har86]. So formuliert beispielsweise SCHNÜTGEN Beziehungen für den Spannungs-Deformations-Zustand von Stahlfaserbeton mit vollständigem und teilweisem Haftverbund sowie auch bei Auflösung der Haftung [Sch75b]. Ausgangspunkt dieses Konzeptes ist dabei stets eine etwa durch Fehlstellen induzierte Rissbildung. Insbesondere für die Beschreibung von Spannungsumlagerungen und Risswachstum erscheint das „Spacing-Concept“ daher geeignet, weniger jedoch für den idealen, ungerissenen Zustand I.

Da die Betrachtung der Erstrisszugfestigkeit und der anschließenden Verfestigung nur für überkritische Fasergehalte und damit im Allgemeinen ausschließlich für höherfeste Faserbetone relevant wird, ist in Deutschland bisher keine Regelung von Faserbeton mit verfestigendem Materialverhalten vorhanden. Basierend auf langjähriger Forschung und Praxiserfahrung existieren hingegen Regelungen für die Konfiguration und Bemessung von normalfestem Stahlfaserbeton [DAf12]. Die aktuelle Ausgabe der DAfStb-Richtlinie „Stahlfaserbeton“ aus dem Jahr 2012 regelt im Bezug auf bestehende Normen und Richtlinien die Eigenschaften und Anwendungen von Normalbeton mit unterkritischem Stahlfasergehalt im Hinblick auf die Tragwerksplanung im Hoch- und Industriebau. Dabei wird die Tragwirkung von Fasern mit formschlüssiger, mechanischer Verankerung insbesondere im Nachbruchbereich rechnerisch erfasst und berücksichtigt. Der Beitrag gerader Stahlfasern mit glatter Oberfläche zum Lastabtrag kann hingegen nach dieser Richtlinie nicht in der Bemessung angesetzt werden. Die DAfStb-Richtlinie regelt dabei die Zugtragfähigkeit für den gerissenen Querschnitt, d. h. für Zustand II, mithilfe von definierten Nachrisszugfestigkeiten.

Als Nachrisszugfestigkeit wird in der DAfStb-Richtlinie „Stahlfaserbeton“ eine fiktive Zugfestigkeit des Stahlfaserbetons bei Überschreiten der Matrixzugfestigkeit bezeichnet, wobei die in den aktivierten Stahlfasern auftretenden Zugkräfte normal zur Rissfläche auf die Fläche der Betonzugzone bezogen werden [DAf12]. Entsprechend wird auch eine Nachrissbiegezugfestigkeit für den Querschnittswiderstand unter Einbezug der Fasern bei Biegung definiert. Die Nachrisszugfestigkeit gilt als charakteristisches Merkmal der Stahlfaserbetongüte. Zur Einstufung und Kennzeichnung des Stahlfaserbetons werden die Leistungsklassen L1 und L2 verwendet, denen die im Rahmen eines geregelten Vier-Punkt-Biegezugversuches ermittelten charakteristischen Durchschnittswerte für die Nachrissbiegezugfestigkeit bei  $n \geq 6$  Prüfkörpern jeweils an den Durchbiegungsstellen  $\delta_{L1} = 0,5 \text{ mm}$  und  $\delta_{L2} = 3,5 \text{ mm}$  zugeordnet werden [DAf12].

### 2.3.2 Spannungs-Dehnungs-Kennlinien

Die DAfStb-Richtlinie „Stahlfaserbeton“ stellt eine Spannungs-Dehnungs-Kennlinie für die bei normalfestem Beton zugunsten der Verarbeitbarkeit üblichen unterkritischen Fasergehalte zur Verfügung, die das entfestigende Verhalten von Faserbeton beschreibt [DAf12]. Darin werden die charakteristischen Punkte des Verlaufes mithilfe der Zugfestigkeit  $f_{ctm}$  und des Elastizitätsmoduls  $E_{cm}$  des Betons sowie der zentrischen Nachrisszugfestigkeiten  $f_{ctR,Li}^f$  für die Leistungsklassen L1 und L2 in Verbindung mit den zugehörigen Dehnungen bis zur rechnerischen Bruchdehnung  $\epsilon_{ct,u}^f = 25 ‰$  bestimmt. Die in der folgenden Abbildung 2.7 dargestellte Spannungs-Dehnungs-Linie kann für die nichtlineare Schnittgrößen- und Verformungsberechnung angewendet werden [DAf12].

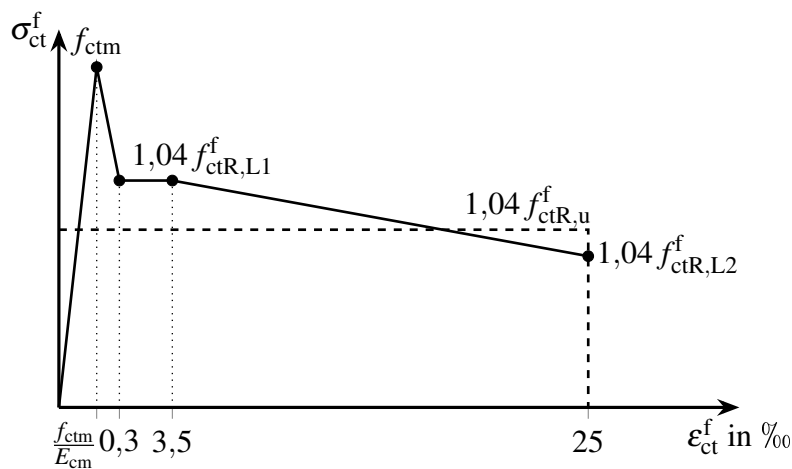


Abbildung 2.7: Zugspannungs-Dehnungs-Linie für Stahlfaserbeton nach [DAf12]

Zur Querschnittsbemessung ist nur eine vereinfachende Spannungs-Dehnungs-Kennlinie zugelassen, bei der die Ausnutzung der gegenüber den Nachrisszugfestigkeiten höheren Erstrisszugfestigkeit nicht erfolgen darf und der wesentliche Anteil der Zugspannungen von einer konventionellen Stabstahlbewehrung aufgenommen wird [DAf12]. Außerdem wird ein Spannungsblock mit einem Grenzwert der zentrischen Nachrisszugfestigkeit  $f_{ctR,u}^f$  für die vereinfachende Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit bei kombinierter Faser- und Stabstahlbewehrung angegeben [DAf12].

OETTEL & EMPELMANN zeigen, dass die Übertragung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie aus der Richtlinie „Stahlfaserbeton“ auf ultrahochfesten Faserbeton auch mit verfestigendem Verhalten infolge von überkritischen Fasergehalten möglich ist [OE15], vgl. Abbildung 2.8. Angelehnt an die Richtlinie schlagen sie die Ableitung der charakteristischen Werte für die zentrische Matrixzugfestigkeit  $f_{ctm}$  und die zentrischen Nachrisszugfestigkeiten  $f_{ctm,i}^f$  gemäß der DAfStb-Richtlinie anhand von ungekerbten Vier-Punkt-Biegezugprüfungen vor [OE15].

Die versuchstechnische Bestimmung der Kennwerte für die Zug- und Nachrisszugfestigkeiten und Dehnungen anhand von zentrischen Zugversuchen oder Drei- oder Vier-Punkt-Biegezugversuchen wird häufig mit ungekerbten Proben empfohlen [AFG13], [LF09], [fib13], wobei auch Umrechnungsverfahren und Vorschläge für Bezugslängen zur Verfügung stehen, sodass Biegezugprüfungen mit gekerbten Probekörpern verwendet werden können [fib13], [OME19].

Auch der MODEL CODE 2010 definiert Spannungs-Dehnungs-Kennlinien für Faserbeton mit verfestigendem und entfestigendem Materialverhalten nach Erstrissbildung [fib13], welche nach DI PRISCO ET AL. auch für ultrahochfesten Faserbeton angewendet werden können [DCD13]. Darin bestimmen die Elastizitätsgrenze  $f_{ct}$  und die Nachrisszugfestigkeiten  $f_{Fts}$  und  $f_{Ftu}$  für den Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (*engl.* serviceability limit state, SLS) respektive der Tragfähigkeit (*engl.* ultimate limit state, ULS) in Verbindung mit zugehörigen Grenzdehnungen den Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie [fib13], vgl. Abbildung 2.9.

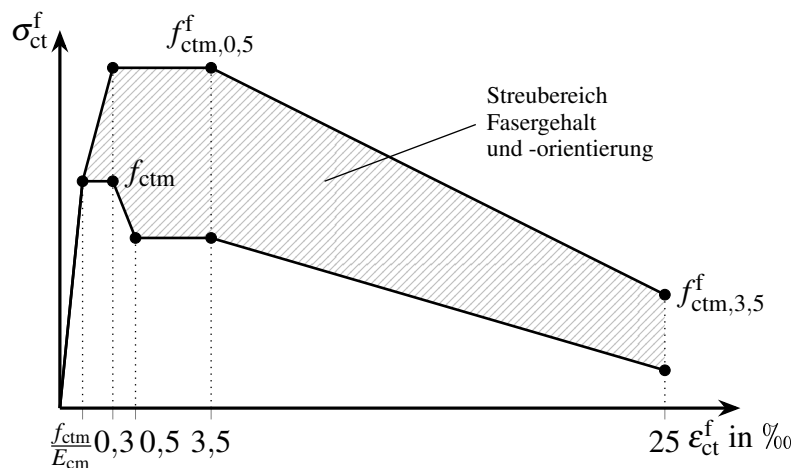


Abbildung 2.8: Zugspannungs-Dehnungs-Linie für UHPFRC nach [OE15]

Nach MODEL CODE 2010 ist die Querschnittsbemessung nur mit stark vereinfachenden konstanten oder linearen Ansätzen der Nachrisszugfestigkeit bei Rissöffnung zulässig, während im Rahmen von Nachweisen im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit mit den komplexeren Spannungs-Dehnungs-Kennlinien gemäß Abbildung 2.9 gearbeitet werden darf.

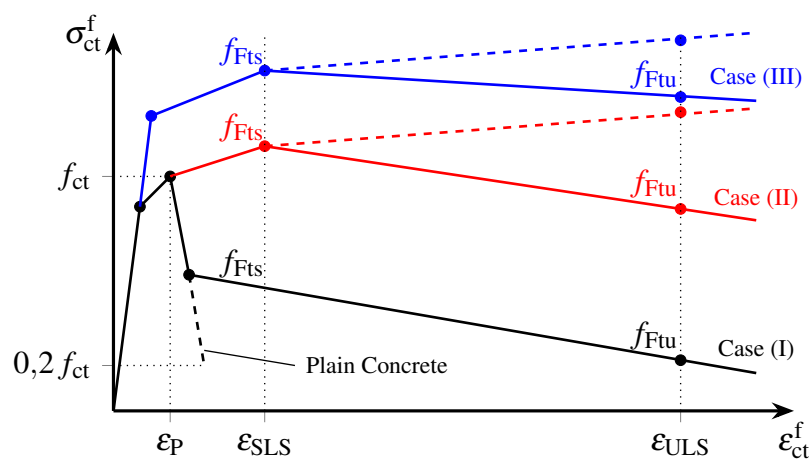


Abbildung 2.9: Zugspannungs-Dehnungs-Linie für Faserbetone nach [fib13]

OETTEL ET AL. schlagen ein Verfahren zur Umrechnung von Traglasten und Durchbiegungen aus Biegezugprüfungen in zentrische Zug- und Nachrisszugfestigkeiten und zugehörige Grenzdehnungen in Anlehnung an den MODEL CODE 2010 für den Werkstoff UHPFRC vor und leiten

dabei vereinfachende Bestimmungsgleichungen für eine Zugspannungs-Dehnungs-Beziehung her [OME19], vgl. Abbildung 2.10.

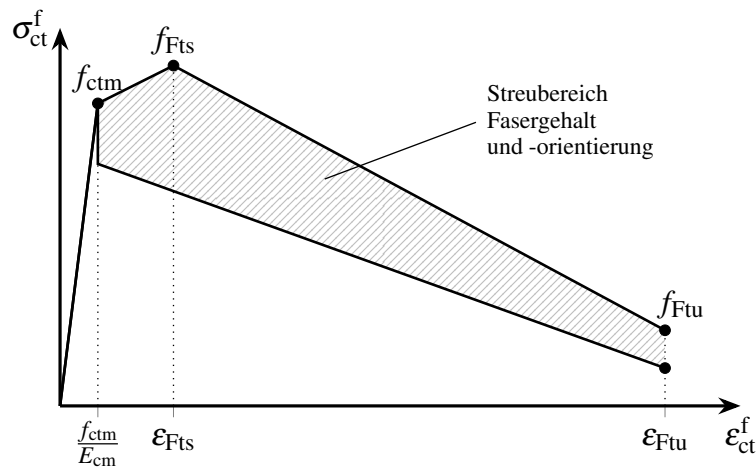


Abbildung 2.10: Zugspannungs-Dehnungs-Linie für UHPFRC nach [OME19]

Über die gezeigten Beispiele hinaus sind auch in Frankreich und Japan vereinfachende Zug- und Druckspannungs-Dehnungs-Beziehungen als Empfehlung zur Bemessung von UHPFRC angegeben, die hauptsächlich auf Basis der Produktlinie DUCTAL entwickelt wurden [AFG13], [DAf08].

### 2.3.3 Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen

Für die bruchmechanische Beschreibung des Nachbruchverhaltens von Faserbetonen werden Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen im Rahmen des „Spacing-Concept“ hergeleitet. Die rissüberbrückende Tragwirkung von Fasern in zementgebundenen Werkstoffen ist bereits seit den 1960er-Jahren Gegenstand der Forschung und Ziel aufwendiger experimenteller und theoretischer Untersuchungen zur Feststellung der Wirkmechanismen der Fasern beim Rissbildungsprozess von Faserbeton [Har86]. Grundlagen der theoretischen Beschreibung von Rissinitiierung und Rissausbreitung mit der Definition eines energetischen Bruchkriteriums liefert GRIFFITH bereits 1921 [Gri21], [Har86], [GS16].

Im Allgemeinen wird das Tragverhalten von stahlfaserverstärktem Beton unter Zugbeanspruchungen in einen bemessungsrelevanten Bereich bis zum Erreichen der Faserbetonzugfestigkeit und einen durch entfestigendes Materialverhalten gekennzeichneten Nachbruchbereich unterteilt. Die Faserbetonzugfestigkeit ist dabei als maximal aufnehmbare Zugspannung des bereits gerissenen Querschnittes mit aktivierter Faserbewehrung definiert und entspricht somit einer zentrischen Nachrisszugfestigkeit [FL12], [DAf08].

Basierend auf eigenen mehrstufigen Untersuchungen schlägt LEUTBECHER eine Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung mit einer Faseraktivierungs- und einer Faserauszugsphase vor [Leu07], [LF09], vgl. Abbildung 2.11. Die darin enthaltenen mathematischen Formulierungen für beide Phasen beziehen sich auf die Definition der Faserwirksamkeit  $\sigma_{cf0}$  als maximal übertragbare Faserbetonspannung oder Faserbetonzugfestigkeit und der zugehörigen Rissbreite  $w_0$  bei Erreichen

dieser maximalen Tragfähigkeit. Die Faserwirksamkeit  $\sigma_{cf0}$  kann dafür anhand von vereinfachenden analytischen Beziehungen, auf die im Folgenden eingegangen wird, näherungsweise hergeleitet oder anhand von experimentellen Untersuchungen bestimmt werden [FL12].

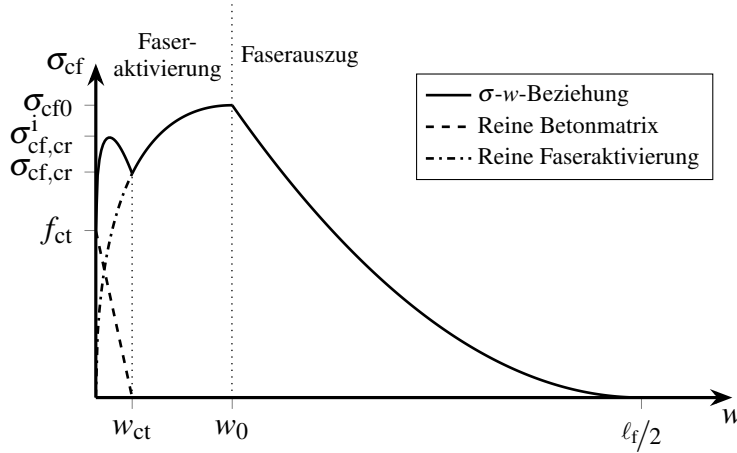


Abbildung 2.11: Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung für UHPFRC nach [LF09]

Die Bestimmung der rissüberbrückenden Wirkung von Fasern im Faserbeton setzt die Kenntnis des Verbundverhaltens voraus. REHM beschreibt 1961 als wesentliche Ursachen für die Verbundwirkung Haftkräfte, hervorgerufen durch Adhäsion oder Kapillarkräfte sowie eine Oberflächenverzahnung, und den Reibungswiderstand infolge der Oberflächenrauigkeit in Verbindung mit Kräften normal zur Oberfläche [Reh61]. Aufgrund des Kräftegleichgewichtes einer rissüberbrückenden Stahleinlage entspricht die Änderung der mittleren Stahlspannung  $d\sigma_{fx}$  in Zugrichtung  $x$  parallel zur Faserlängsachse der durch die mittlere tangentielle Verbundspannung  $\tau_f$  über den Umfang der kreisrunden Faser  $U_f$  eingeleiteten Kraft bezogen auf den ihre Querschnittsfläche  $A_f$

$$\frac{d\sigma_{fx}}{dx} = \tau_f \cdot \frac{U_f}{A_f} = \tau_f \cdot \frac{4}{d_f} \quad (2.4)$$

[Reh61]. Dabei ist nach REHM bei Ansatz einer fiktiven Verbundspannung  $\tau_f$  diese Gleichgewichtsbetrachtung auch bei profiliertem Stahl wie etwa Rippenstahl gültig [Reh61]. Diesen proportionalen Zusammenhang zwischen der Haftverbundspannung und der Änderung der Stahlspannung beschreiben HOYER & FRIEDRICH bereits 1939 auf der Grundlage ihrer Untersuchungen [HF39]. Anhand vereinfachender Gleichgewichtsbetrachtungen ermitteln sie den Verlauf der Stahl- und Betonzugkraft sowie der Haftspannung über die Verbundlänge, vgl. Abbildung 3.10 in Kapitel 3.3.

HARTWICH stellt fest, dass die Wirksamkeit des Haftverbundes bei der Faserverankerung gering ist und näherungsweise vernachlässigt werden kann [Har86]. Er ermittelt die Faserrissspannung entsprechend Gleichung (2.4) basierend auf einer über eine zu bestimmende Einleitungslänge konstante Reibverbundspannung  $\tau_f^R$  [Har86]. Weitere Definitionen für Verbundgesetze und deren Bedeutung für die Faserwirksamkeit werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit untersucht, vgl. Kapitel 3 und 6. Die halbe Rissöffnung  $w/2$  einer beidseitig eingebetteten Einzelfaser mit einem mittigen, diskreten Einzelriss ergibt sich nach HARTWICH aus der kumulierten elastischen Verformung der Faser entlang der wirksamen Einleitungslänge  $x_e$  des Verbundes auf einer Seite



des Risses, wobei diese Länge maximal gleich der verfügbaren Einbindelänge  $\ell_e \leq \ell_f/2$  sein kann, zu

$$\frac{w}{2} = \int_0^{x_e} \varepsilon_f(x) dx = \frac{1}{E_f} \int_0^{x_e} \sigma_f(x) dx \quad (2.5)$$

[Har86]. Dabei werden Betonzugdehnungen oder jegliche Veränderungen der Betoneigenschaften entlang der Lasteinleitungslänge sowie die Bildung von Mikrorissen im Rahmen einer Rissprozesszone vernachlässigt. Außerdem wird vorausgesetzt, dass die Rissbreite signifikant geringer ist als die Länge der Faser und diese als unterkritische Faserlänge nur zu einem Faserauszug anstatt eines Faserreißen führt. Da in Gleichung (2.5) auf eine Transformation von Richtungen verzichtet wird, ist die Beziehung nur für parallele Fasern mit einer Ausrichtung normal zur Rissebene gültig [Har86].

Mithilfe der mittleren Einleitungslänge  $\ell_{em}$

$$\ell_{em} = \frac{2}{\ell_f} \int_0^{x_e} \left( \frac{\ell_f}{2} - x \right) dx = x_e \cdot \left( 1 - \frac{x_e}{\ell_f} \right) \quad \text{mit} \quad 0 \leq x_e \leq \frac{\ell_f}{2} \quad (2.6)$$

wird der Einfluss einer gleichmäßigen Verteilung paralleler Fasern mit einer Ausrichtung senkrecht zur Rissebene und unterschiedlich langen Teillängen zu beiden Seiten des Risses erfasst [Har86]. Während SCHNÜTGEN für statistische Faserverteilungen eine mittlere Einbindelänge von  $\ell_{em} = \ell_f/4$  angibt, ermittelt auch FRETTLÖHR die den Erwartungswert bei gleichverteilter Auftretenswahrscheinlichkeit für Einbindelängen zwischen 0 und  $\ell_f/2$  infolge einer homogenen Faserverteilung zu  $\ell_{em} = \ell_f/4$  [Sch75b], [Fre11].

Das Zusammenführen der Zusammenhänge zwischen Faserspannung  $\sigma_f$  und Verbundspannung  $\tau_f$  nach Gleichung (2.4) sowie zwischen wirksamer Einleitungslänge  $x_e$  und mittlerer Einleitungslänge  $\ell_{em}$  nach Gleichung (2.6) mit der allgemein formulierten Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung (2.5) ergibt die mittlere Faserspannung  $\sigma_{fm}$  in Abhängigkeit der Rissöffnung  $w$  für die Faseraktivierungsphase

$$\sigma_{fm} = \sqrt{\frac{4 \cdot \tau_f \cdot E_f \cdot w}{d_f}} \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{E_f \cdot d_f \cdot w}{4 \cdot \tau_f \cdot \ell_f^2}} \right) \quad (2.7)$$

[Har86]. HARTWICH bewertet die Wirksamkeit der Faserbewehrung anhand der maximalen mittleren Faserspannung  $\sigma_{fm,max}$ , die er mit der größtmöglichen Einleitungslänge  $x_e = \ell_f/2$  zu

$$\sigma_{fm,max} = \frac{\tau_f \cdot \ell_f}{d_f} \quad (2.8)$$

bestimmt [Har86]. Dieses Vorgehen ist durch die Annahme der vollständigen Aktivierung aller benachbarten, parallel zueinander ausgerichteten Fasern ohne auftretenden Endschlupf begründet [Leu07], [Pfy03]. Unter Voraussetzung linear-elastischen Materialverhaltens lässt sich die zugehörige Grenzzrissweite  $w_{lim}$  zu

$$w_{lim} = \frac{\sigma_{fm,max} \cdot \ell_f}{E_f} = \frac{\tau_f \cdot \ell_f^2}{E_f \cdot d_f} \quad (2.9)$$

berechnen [Har86]. Das Erreichen der maximalen mittleren Faserrissspannung markiert den Über-

gang zwischen den Phasen der Faseraktivierung und dem Faserauszug. PFYL, JUNGWIRTH und LEUTBECHER ermitteln für parallel ausgerichtete Fasergruppen dieselben Zusammenhänge und formulieren die maximale Faserbetonspannung  $\sigma_{cf0}$ , welche auch als Faserwirksamkeit bezeichnet wird, allgemein für eine dreidimensionale homogene Faserverteilung in Abhängigkeit des Fasergehaltes  $\rho_f$  in Vol.-% sowie zusätzlichen Faktoren zur Berücksichtigung der Faserorientierung [Pfy03], [Jun06], [Leu07]. So wird die Faserwirksamkeit als maximale Faserbetonspannung  $\sigma_{cf0}$  in Abbildung 2.11 mit dem Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  und Faserwirksamkeitsbeiwert  $g$  zur Bewertung der Faserverteilung zu

$$\sigma_{cf0} = \eta \cdot g \cdot \rho_f \cdot \frac{\tau_f \cdot \ell_f}{d_f} \quad (2.10)$$

bestimmt. Als Faserbetonzugfestigkeit gibt auch BEHLOUL diese Beziehung an, wobei die Parameter speziell anhand des verwendeten ultrahochfesten, faserbewehrten Feinkornbetons (*frz.* béton de poudres réactives (BPR), *engl.* reactive powder concrete (RPC)) aus der Produktlinie DUCTAL hergeleitet wurden [DAf08], [Fre11]. Diese Faserwirksamkeit  $\sigma_{cf0}$  wird als Grundlage für die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung der Faseraktivierungsphase nach Gleichung (2.7) definiert, die sowohl bei PFYL für normalfesten Stahlfaserbeton als auch bei JUNGWIRTH und LEUTBECHER für ultrahochfesten Stahlfaserbeton in vereinfachender Schreibweise unter Einbeziehung der zugehörigen Rissweite  $w_{lim} = w_0$  nach Gleichung (2.9) als

$$\sigma_{cf}(w) = \sigma_{cf0} \cdot \left( 2 \cdot \sqrt{\frac{w}{w_0}} - \frac{w}{w_0} \right) \quad (2.11)$$

zu finden ist [Leu07], [Pfy03], [Jun06]. Eine Erweiterung dieser Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung für die Faseraktivierungsphase nach Gleichung (2.11) hinsichtlich der Berücksichtigung von Schwindeinflüssen formuliert LEUTBECHER [Leu07].

Für die Herleitung der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung für die Faserauszugsphase bezieht sich HARTWICH auf theoretische Untersuchungen von AVESTON & KELLY an spröden Faserverbundwerkstoffen, wonach bei dreidimensionaler Faserverteilung die Anzahl derjenigen Fasern, die eine beliebige Schnittebene kreuzen, mit  $N_f^{3D} = 2 \cdot V_f / (\pi \cdot d_f^2)$  angegeben werden kann [AK73], [Har86]. Der Volumenanteil der Fasern  $V_f$  kann dem Fasergehalt  $\rho_f$  gleichgesetzt werden [AK73]. Für eine dreidimensionale Faserverteilung ergibt die Multiplikation der maximalen mittleren Faserspannung  $\sigma_{fm,max}$  nach Gleichung (2.8) mit der resultierenden Faserfläche aller kreuzenden Fasern eine maximale „post-kritische“ Faserbetonzugspannung  $\sigma_{p,max}$  von

$$\sigma_{p,max} = \frac{\rho_f}{2} \cdot \sigma_{fm,max} \quad (2.12)$$

[Har86]. Für den vereinfachten Fall, dass die sich öffnende Rissbreite genau der gleichmäßigen Schlupfverschiebung an allen eingebetteten Faserenden entspricht, d. h. keine elastische Verlängerung der Faser im geöffneten Riss berücksichtigt wird, findet HARTWICH ohne eine weitere detaillierte Herleitung die vereinfachende Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung für den reinen Faserauszug

$$\sigma_p(w) = \sigma_{p,max} \cdot \left( 1 - \frac{2w}{\ell_f} \right)^2 \quad (2.13)$$

und zeigt die gute Übereinstimmung des beim Herausziehen der Faser abfallenden Spannungsver-

laufes für Versuche mit Stahlfaserbeton [Har86]. Die zuvor getroffenen Annahmen bleiben durch den Bezug auf  $\sigma_{fm,max}$  und das Einsetzen von  $\ell_{e,max} = \ell_f/2$  als größtmögliche Einbindelänge zutreffend. Auch PFYL findet diesen vereinfachenden funktionellen Zusammenhang zwischen Rissöffnung und abfallender Faserbetonzugspannung nach Gleichung (2.13) für parallele Fasern mit einer Ausrichtung senkrecht zur Rissebene und weist auf die implizite Vernachlässigung der gegenseitigen Beeinflussung der Fasern hin [Pfy03]. Die Modellierung von VOO & FOSTER hingegen berücksichtigt sowohl die Wechselwirkungen benachbarter Fasern in Form einer vergrößerten lokalen Schädigung der Betonmatrix, die näherungsweise durch einen Schädigungsbeiwert  $K_d$  erfasst wird und den Faserwirksamkeitsbeiwert  $g$  ersetzt, als auch die durch plastische Verformungen verzögerte Aktivierung von rissüberbrückenden Fasern mit zur Rissebene geneigter Ausrichtung [VF03].

Analog zur Formulierung der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung für die Faseraktivierungsphase gilt für die Faserauszugphase mit  $w \geq w_0$

$$\sigma_{cf}(w) = \sigma_{cf0} \cdot \left(1 - \frac{2w}{\ell_f}\right)^2 \quad (2.14)$$

oder weiter vereinfachend für den Nachweis zur Begrenzung der Rissbreite nach LEUTBECHER

$$\sigma_{cf} = \sigma_{cf0} \quad (2.15)$$

[Leu07], [LF09], [DAf08]. Auch für die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung zur Faserauszugphase nach Gleichung (2.14) gibt LEUTBECHER eine Erweiterung hinsichtlich der Berücksichtigung von Schwindeinflüssen an [Leu07].

Die vollständige mathematische Beschreibung des Kurvenverlaufes in Abbildung 2.11 wird mit der Rissspannung

$$\sigma_{cf,cr}(w) = f_{ct} \cdot \left(1 - \frac{w}{w_{ct}}\right) + \sigma_{cf0} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{\frac{w}{w_0}} - \frac{w}{w_0}\right) \quad (2.16)$$

für den ersten Teilbereich der Rissöffnung  $w \leq w_{ct}$  gegeben, wobei die Grenzzrissbreite der Betonmatrix mithilfe der Bruchenergie  $G_F$  und der Zugfestigkeit  $f_{ct}$  des unbewehrten Betons zu  $w_{ct} = 2 \cdot G_F / f_{ct}$  berechnet werden kann [LF09].

Nach FEHLING & LEUTBECHER kann die Spannungsverteilung am gerissenen Querschnitt unmittelbar aus der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung entsprechend der Abbildung 2.11 und nach den Gleichungen (2.11) und (2.14) bei Vernachlässigung der Matrixzugfestigkeit ermittelt werden [FL12]. Dazu wird in der Zugzone des Querschnittes eine über die Risstiefe linear veränderliche Rissbreite angenommen und zur Bemessung näherungsweise eine Rissöffnung  $w = w_0$  angesetzt [FL12]. Damit wird nur die Faseraktivierungsphase bis zur maximalen Faserbetonzugfestigkeit  $\sigma_{cf0}$  berücksichtigt.

Als vereinfachende Alternative schlagen FEHLING & LEUTBECHER außerdem die Verwendung eines rechteckigen Spannungsblockes über 90 % der Risstiefe und mit nur 90 % der maximalen Faserbetonzugfestigkeit vor [FL12]. Darüber hinaus werden unter Anwendung einer Verträglichkeitsbedingung für die Rissöffnung Bemessungshinweise für mit Stabstahl und Fasern bewehrte Betonquerschnitte gegeben [FL12].

Da LEUTBECHER & FEHLING für ihre Versuche an faserbewehrten, ultrahochfesten Betonen mit unterschiedlichen Faserarten und Fasergehalten insbesondere für eine Bewehrung mit Kurzfasern ( $\ell_f = 9\text{ mm}$ ) und niedrigem Fasergehalt ( $\rho_f = 0,9\text{ Vol.}\%$ ) eine gute Übereinstimmung des ursprünglich für Stahlfaserbeton hergeleiteten Modells der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung mit den experimentellen Ergebnissen erhalten, empfehlen sie ihren Ansatz vor allem aufgrund der geringen Anzahl zu bestimmender Modellparameter für die näherungsweise Bemessung von UHPFRC [LF09], [FL12], [DAf08].

Eine detaillierte Bewertung des mechanischen Modells nach den Gleichungen (2.11), (2.14) und (2.16) sowie der Faserwirksamkeit  $\sigma_{cf0}$  nach Gleichung (2.10) anhand von experimentellen Untersuchungen von UHPFRC unter Zugbeanspruchung liefert LEUTBECHER [Leu07]. Auch JUNGWIRTH setzt sich aufgrund auftretender Diskrepanzen zwischen den eigenen Versuchen an UHPFRC-Zugproben und dem mechanischen Modell für Stahlfaserbeton detailliert mit den getroffenen Vereinfachungen und der dadurch eingeschränkten Modellgüte auseinander und schlägt einen semi-empirischen, hyperbolischen Ansatz zur Beschreibung der Faserauszugphase vor [Jun06]. Vorschläge zur Berücksichtigung der in der Faseraktivierungsphase bei UHPFRC häufig beobachteten Mehrfachrissbildung vor Risslokalisierung und damit einhergehender Entfestigung sind z. B. in [Kul98a], [Jun06] und [Leu07] zu finden.

Die vorgestellte Beziehung sowie weitere Vorschläge für eine Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung für zugbeanspruchten Faserbeton vergleicht FRETTLÖHR mit eigenen Versuchen mit ultrahochfestem Faserfeinkornbeton der Produktlinie DUCTAL [Fre11]. Darunter sind Polynome zweiten und dritten Grades von LI, NAAMAN ET AL. und BEHLOUL, die alle drei auf die Faserwirksamkeit beziehungsweise Faserbetonzugfestigkeit entsprechend Gleichung (2.10) bezogen sind. Zudem stellt FRETTLÖHR eine vereinfachende parametrisierte Approximation vor, die eine für seine Versuche angemessene Näherung darstellt [Fre11]. Dabei enthält nur das Modell von LI eine nichtlineare Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung für die Faseraktivierungsphase, vgl. [Fre11].

Für normalfesten Stahlfaserbeton existieren außerdem bi- und trilineare sowie nichtlineare Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen, vgl. [Küt00], [fib93], [DCD13]. Weil dabei in der Regel jedoch mit einsetzender Rissöffnung nur die Beschreibung von entfestigendem Materialverhalten vorgesehen ist, wird auf eine detailliertere Erläuterung der Zusammenhänge im Rahmen dieser Arbeit verzichtet. Die versuchstechnische Bestimmung der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen und insbesondere der Faserbetonzugfestigkeit oder Faserwirksamkeit  $\sigma_{cf0}$  wird anhand von zentrischen Zugversuchen oder Drei- oder Vier-Punkt-Biegezugversuchen mit gekerbten Proben empfohlen, vgl. [AFG13], [LF09], [fib13].

## 2.4 Faserwirksamkeit

Die umfangreichen Vereinfachungen im Rahmen der Modellierung des Spannungs-Rissöffnungs-Verhaltens oder einer Spannungs-Dehnungs-Kennlinie für ultrahochfesten Faserbeton zeigen die Komplexität der bislang nicht ausreichend untersuchten zahlreichen Einflussfaktoren und ihrer Wechselwirkungen. In diesem Abschnitt 2.4 werden die maßgebenden Einflüsse, wie beispielsweise die Faserorientierung, auf die Faserwirksamkeit sowie Ansätze zur Abschätzung und Bewertung der Fasertragwirkung und der Robustheit faserbewehrter Betonbauteile entsprechend des aktuellen Forschungsstandes zusammengefasst.

Die Berücksichtigung der Fasertragwirkung in der Bemessung ist insbesondere aufgrund der Inhomogenität des Werkstoffes mit Unsicherheit verbunden. So ist nach der DAfStb-Richtlinie „Stahlfaserbeton“, welche als richtungsweisende Regelung für den noch nicht normativ geregelten Werkstoff UHPFRC gilt, die Berücksichtigung der Zugfestigkeit im Nachbruchbereich für Nachweise der Tragfähigkeit bei Biegung und Normalkraftbeanspruchung bis zu einer Dehnung von  $\epsilon_{ct}^f = 25\text{‰}$  im Zugbereich zulässig, wobei der wesentliche Traganteil durch konventionelle Betonstahlbewehrung erbracht werden muss und die beigemischten Fasern eine formschlüssige mechanische Verankerung aufweisen müssen [DAf12]. Zudem ist auch für die Nachweise der Querkrafttragfähigkeit und der Durchstanztragfähigkeit ein zusätzlicher Anteil infolge der Nachrisszugfestigkeit zu berücksichtigen. Der Traganteil der Fasern darf außerdem auch bei Gebrauchstauglichkeitsnachweisen wie etwa der Begrenzung der Rissbreite und im Hinblick auf Mindestbewehrungen im Rahmen der Konstruktionsregeln berücksichtigt werden. Bei Stabilitätsbetrachtungen, Ermüdungsnachweisen und Torsionsnachweisen hingegen darf keine Fasertragwirkung angesetzt werden [DAf12]. Für die wirtschaftliche Anwendung von faserbewehrtem Beton ist insbesondere bei ultrahochfestem Faserbeton mit verfestigendem Materialverhalten eine umfangreichere Berücksichtigung des Traganteiles der Fasern erforderlich.

Das wesentliche Ziel der Faserverstärkung von normalfestem Beton ist die Reduzierung von Rissbreiten in einem gleichmäßigen Rissbild. Die dadurch verbesserte Schlag- und Abriebfestigkeit sowie die bis zur Wasserundurchlässigkeit erhöhte Gefügedichte wird bei derzeitigen Anwendungen in Bereichen mit erhöhtem Dauerhaftigkeitsanspruch, wie z. B. bei Hallen-, Industriefußböden, Becken und Behälter, Bushaltestellen und im Tunnelbau, genutzt. Demgegenüber gerät bei faserverstärktem UHPC die Leistungssteigerung im Grenzzustand der Tragfähigkeit durch die Zugabe überkritischer Fasergehalte zunehmend in den Fokus. Die Sicherstellung eines duktilen Spannungs-Deformations-Verhaltens setzt neben einer optimierten Materialqualität in der Fertigung einen bei Rissbildung einsetzenden kontrollierten Faserauszug anstelle einer katastrophalen Kettenreaktion durch Faserreißen voraus. Als makroskopische Eigenschaft des Verbundwerkstoffes charakterisiert die Bezeichnung Faserwirksamkeit die Leistungsfähigkeit hinsichtlich der Tragkapazität im Nachbruchbereich.

#### 2.4.1 Faserwirksamkeit in Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen

Dem Bemessungskonzept von FEHLING & LEUTBECHER entsprechend kann die als Faserwirksamkeit  $\sigma_{cf0}$  bezeichnete maximale Faserbetonzugspannung nach Gleichung (2.10) mit der gesamten Phase der Faseraktivierung und des verfestigenden Materialverhaltens nach Gleichung (2.11) für die Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit nutzbar gemacht werden, während im Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit sogar noch Teile der entfestigenden Faserauszugphase angerechnet werden können [FL12], [LF09], [Leu07]. Während die versuchstechnische Bestimmung der maximalen Betonzugspannung unter Berücksichtigung von Inhomogenitäten und streuenden Materialeigenschaften die nutzbare Wirksamkeit der Faserbewehrung realitätsnah erfasst, berücksichtigt die überschlägige Ermittlung nach Gleichung (2.10) näherungsweise

- die Verbundfestigkeit  $\tau_f$ , gemeint ist hier i.d.R. im Reibverbund,
- die Schlankheit  $\lambda_f = \ell_f/d_f$  der einzelnen Faser,
- den Fasergehalt  $\rho_f$  in Vol.-%,

- die Faserorientierung mit dem Faserorientierungsbeiwert  $\eta$  sowie
- den abweichenden Faserauszugwiderstand von beliebig orientierten und verteilten Fasern im Vergleich zu in Beanspruchungsrichtung ausgerichteten Fasern mithilfe des Faserwirksamkeitsbeiwertes  $g$ .

Nicht erfasst werden hingegen die abweichende Tragkapazität durch eine gegenseitige Beeinflussung der Fasern oder eine Schädigung der Matrix infolge von Umlenkkräften sowie Herstellungseinflüsse und Maßstabeffekte [Leu07], [Leh18], [Jun06]. Eine vergleichende Bewertung und Optimierung oder Effizienzsteigerung des Faserverbundwerkstoffes anhand der rechnerischen Faserwirksamkeit erscheint daher nicht möglich, während die versuchstechnisch ermittelte Faserwirksamkeit einen näherungsweisen Vergleich von unterschiedlichen Faserbetonkonfigurationen erlaubt, wenn auch die maximale Querschnittstragfähigkeit häufig aufgrund einer ungleichmäßigen Rissöffnung etwas geringer ist [Leu07]. In einer programmgestützten Parameterstudie mit den genannten Einflussfaktoren unter Berücksichtigung der lokal streuenden Faserverteilung ermittelt LEUTBECHER am Beispiel eines kombiniert bewehrten UHPC-Zugkörpers einen signifikanten Einfluss der Bruchenergie  $G_F$  der Matrix bei höheren Fasergehalten und der Matrixzugfestigkeit  $\sigma_{ct}$  bei niedrigen Faseranteilen [Leu07].

Mit der Annahme einer konstanten gemittelten Spannungsverteilung über die gesamte Verbundlänge in der Faser und in der Verbundzone kann die Grenزشlankheit  $\lambda_{f,krit}$  als maximal zulässige Schlankheit  $\lambda_f = \ell_f/d_f$  zur Sicherstellung des Faserauszuges anstelle von Faserreißen zu

$$\lambda_{f,krit} = \frac{f_{ft}}{2 \cdot \tau_f} \quad (2.17)$$

angegeben werden, wobei  $f_{ft}$  der rechnerischen Zugfestigkeit der Stahlfaser entspricht [Leu07], vgl. Kapitel 3.

Der kritische Fasergehalt unterscheidet verfestigendes und entfestigendes Nachrissverhalten für stahlfaserverstärkten Beton. Bei dreidimensionaler, ungerichteter Faserverteilung bestimmt HARTWICH den kritischen Fasergehalt  $\rho_{f,krit}$  in Vol.-% zu

$$\rho_{f,krit} = \frac{2 \cdot \sigma_{cf,cr} \cdot d_f}{\tau_f \cdot \ell_f}, \quad (2.18)$$

während bei vereinfachten Herleitungen für eine gerichtete, eindimensionale Faserorientierung der Vorfaktor 2 entfällt [Har86], [BFW17]. Bedingt durch die Herstellbarkeit und Verarbeitbarkeit lassen sich nur Fasergehalte bis 3 Vol.-% umsetzen [BFW17].

Die Einhaltung einer kritischen Faserlänge  $\ell_{f,krit}$  oder der Grenزشlankheit  $\lambda_{f,krit}$  sowie die Beachtung des kritischen Fasergehaltes  $\rho_{f,krit}$  können die getroffenen Annahmen und Vereinfachungen rechtfertigen und die Anwendbarkeit der Beziehung (2.10) hinsichtlich des erwünschten duktilen Tragverhaltens als Näherung gewährleisten. Insbesondere im Zusammenspiel mit konventionellem Bewehrungsstahl kann die verfestigende Faserwirkung nicht gesteigert werden, ohne das Verformungsvermögen in einem mit dem Stabstahl verträglichen Maß zu halten [Pfy03]. Nur mit ausreichender Duktilität kann die Energie aus außergewöhnlichen Einwirkungen absorbiert werden, was die Robustheit von Tragwerken entscheidend verbessert. Zur Sicherstellung einer homogenen Faserverteilung und zur Vermeidung von Igel-Bildung bei der Herstellung ist eine Mindestlänge der beigemischten Fasern von  $\ell_{f,min} = 2 \cdot d_{GK}$  nicht zu unterschreiten, wobei

als Größtkorndurchmesser bei Grobkorn-UHPC ungefähr  $d_{\text{GK}} = 8 \text{ mm}$  und bei Feinkorn-UHPC etwa  $d_{\text{GK}} = 0,5 \text{ mm}$  üblich sind [BFW17].

### 2.4.2 Leistungsfähigkeit der Faserverstärkung

STENGEL definiert eine Faserleistungskennzahl, die einer auf das Volumen bezogenen Faserauszugskraft entspricht. In Verbindung mit dem Volumengehalt der Fasern im Beton kann somit die Faserwirkung auf Werkstoffebene bewertet werden [Ste13]. Dazu ermittelt er einen Fasereffektivitätsbeiwert  $\eta_{\text{F},\theta}$  als Produkt aus einem winkelabhängigen Effektivitätsbeiwert, multipliziert mit einem Beiwert für die Wahrscheinlichkeit der Orientierung und aufsummiert über definierte Winkelbereiche [Ste13]. Dieser zweite Teilbeiwert bezieht die maximale Faserauszugskraft bei geneigtem Faserauszug auf den entsprechenden Maximalwert bei geradem Faserauszug und nimmt im Bezug auf die durchgeführte Versuchsserie Werte zwischen  $2/3$  und  $2,76$  an [Ste13]. Ein weiterer Effektivitätsbeiwert  $\eta_\ell$  erfasst die wirksame Verbundlänge der rissüberbrückenden Fasern. Multipliziert mit dem Fasereffektivitätsbeiwert zur Faserorientierung und der maximalen Faserauszugskraft  $F_{\text{f, bu}}$  bei geradem Faserauszug mit zur Hälfte eingebetteter Faser und bezogen auf das absolute Faservolumen  $V = \ell_{\text{f}} \cdot r_{\text{f}}^2 \cdot \pi$  errechnet STENGEL die Faserleistungskennzahl  $FLK_{\text{f}}$  in  $\text{N/mm}^3$  zu

$$FLK_{\text{f}} = \frac{F_{\text{f, bu}} \cdot \eta_\ell \cdot \eta_{\text{F},\theta}}{\ell_{\text{f}} \cdot r_{\text{f}}^2 \cdot \pi} \quad (2.19)$$

[Ste13]. Eine vergleichende Beurteilung der Fasertragwirkung im Verbundwerkstoff mit der Faserleistungskennzahl ermöglicht die ökonomische und ökologische Auswahl optimaler Werkstoffkonfigurationen [Ste13].

LEHMBERG entwickelt einen Fasereffektivitätsfaktor  $k_{\text{f, eff}}$ , der die von ihm beobachteten Einflussfaktoren als Produkt aus einzelnen Effektivitätswerten zusammenfasst und eine simple Bestimmung von Festigkeitswerten für die Nachweisführung wie beispielsweise die Abminderung der Nachrisszugfestigkeit in Abhängigkeit der Fasereffektivität ermöglichen soll [Leh18]. Darin werden die Einflüsse aus

- dem Fasergehalt mit  $k_{\text{f, v}}$  und der lokalen Abweichung von einer gleichmäßigen Faserverteilung mit  $k_{\text{f, v, lok}}$ ,
- der Faserorientierung mit  $k_{\text{f, \theta}}$  und der lokalen Abweichung davon mit  $k_{\text{f, \theta, lok}}$ ,
- Maßstabeffekten mit  $k_{\text{f, k}}$ ,
- der Herstellung mit  $k_{\text{f, cast}}$

sowie aus der trockenen Fügung von Fertigteilen erfasst [Leh18]. Dabei werden ausführlich die Einflussfaktoren quantifiziert und für die jeweiligen Nachweise zusammengestellt, vgl. [Leh18]. Eine Bewertung unterschiedlicher Werkstoffkonfigurationen anhand des Fasereffektivitätsfaktors  $k_{\text{f, eff}}$  erfolgt hingegen nicht.

## 3 Phänomenologisches Verbundverhalten

Die Leistungsfähigkeit von Verbundwerkstoffen hängt wesentlich von der Verbundwirkung zwischen den Komponenten ab. Durch chemische und physikalische Wechselwirkungen zwischen den Materialkomponenten entsteht eine kraftschlüssige Verbindung, durch die ein gegenüber den Einzelkomponenten verbessertes Spannungs-Deformations-Verhalten erreicht wird. Das Verständnis der Mechanismen und Prozesse in der Grenzschicht zwischen Faser und Matrix bildet im Rahmen dieser Arbeit die Grundlage für die Modellierung der Verbundwirkung, vorgestellt in Kapitel 4. Basierend auf einer Literaturstudie zum aktuellen Stand der Forschung zur Fasertragwirkung in ultrahochfestem Faserbeton werden in diesem Kapitel zunächst mögliche Verbundmechanismen hinsichtlich ihrer Bedeutung für die Kraftübertragung evaluiert. Die Betrachtung der phänomenologischen Zusammenhänge erfolgt dabei unabhängig von vorhandenen Modellierungsansätzen und Sicherheitsbeurteilungen.

Als maßgebende Methode zur experimentellen Untersuchung der Verbundwirkung dienen Faserauszugversuche. Anders als bei Auszugversuchen mit konventionellem Bewehrungsstahl erlaubt der kleine Versuchsmaßstab bei Faserauszugversuchen nur eine Analyse der integralen Verbundwirkung, was die separate Erfassung der einzelnen Verbundmechanismen erschwert. Darüber hinaus spielen auch äußere Einflüsse wie die Lasteinleitung und Lagerung der Versuchskörper eine wesentliche Rolle im Hinblick auf das experimentell ermittelte Verbundverhalten. Insbesondere Beanspruchungen quer zur Grenzschicht beeinflussen die Fasertragwirkung signifikant. Das folgende Kapitel fasst die maßgebenden Einflussfaktoren auf das Verbundverhalten entsprechend dem aktuellen Forschungsstand zusammen und charakterisiert die Verbundwirkung phänomenologisch.

### 3.1 Verbundmechanismen

Die Beschreibung des mikrophysikalischen Verbundverhaltens orientiert sich an den charakteristischen Verbundphasen des starren und des verschieblichen Verbundes, die sich vor allem hinsichtlich der wirksamen Verbundmechanismen unterscheiden. Ziel dieser Arbeit ist die Modellierung des Verbundverhaltens zwischen glatten Stahlfasern und der umgebenden Matrix aus Feinkorn-UHPC. Typische Merkmale der Verbundwirkung zwischen elastischen Kurzfasern und der spröden Betonmatrix sind die Ausbildung eines Kontaktzonenrisses und anschließender Relativverschiebungen zwischen den Oberflächen. Um die auftretenden Verbundmechanismen zu charakterisieren und anschaulich interpretieren zu können, ist eine materialwissenschaftliche Betrachtung der Verbundzone erforderlich und daher Bestandteil dieses Kapitels. Sowohl die Analyse der Mikrostruktur der Grenzschicht als auch der darin wirkenden Schädigungsmechanismen sind derzeit Gegenstand der Forschung und noch nicht abschließend geklärt.

#### 3.1.1 Mikrostruktur der Verbundzone

Die Mikrostruktur von UHPC ist gegenüber Normalbeton hinsichtlich ihrer Gefügedichte und Festigkeit optimiert, sodass die Verbundzone zwischen der Gesteinskörnung und der Bindemittelmatrix, die bei normalfestem Beton in der Regel als Schwachstelle gilt, nahezu dieselben Materialeigenschaften wie die übrige Matrix aufweist, vgl. Kapitel 2.1. Die Kontaktzone zwischen den eingebetteten Zuschlägen oder Stahleinlagen und der Bindemittelmatrix ist etwa seit Ende der 1970er-Jahre Gegenstand der Forschung mit besonderem Fokus auf die chemische



Zusammensetzung und Beeinflussung der Mikrostruktur und daraus resultierenden Verbundfestigkeit, vgl. z. B. [PT78b], [BDM85], [GN00], [RDZ77]. Als Ursachen für die Schwächung der ITZ gegenüber dem Zementstein in normalfesten Betonen gilt die Anlagerung von Calciumhydroxidkristallen und locker gepacktem CSH-Gel in Form eines Duplexfilmes oder zusammen mit einer porösen Schicht aus CSH-Phasen und nadelförmigen Ettringitkristallen, die sich aufgrund von Hohlräumen in der Kornpackung in unmittelbarer Nähe zu den Zuschlägen ausbilden [BDM85], [PT78b], [Pfy03], [RDZ77], vgl. Abbildung 3.1. Nach aktuellen Erkenntnissen beispielsweise durch STENGEL lässt sich in ultrahochfestem Beton infolge des niedrigen Wasser-Zement-Wertes und der damit reduzierten Wasseranlagerung an den Zuschlagsoberflächen sowie der Optimierung der Gefügedichte keine poröse und geschwächte calciumhydroxidreiche ITZ beobachten [Ste13]. Aufgrund der latent hydraulischen Wirkung und der Füllerwirkung von Mikrosilica weist die ITZ eine hohe Dichte ohne erkennbaren Schichtaufbau wie bei Normalbeton auf [Juh11], vgl. Abbildung 3.1.

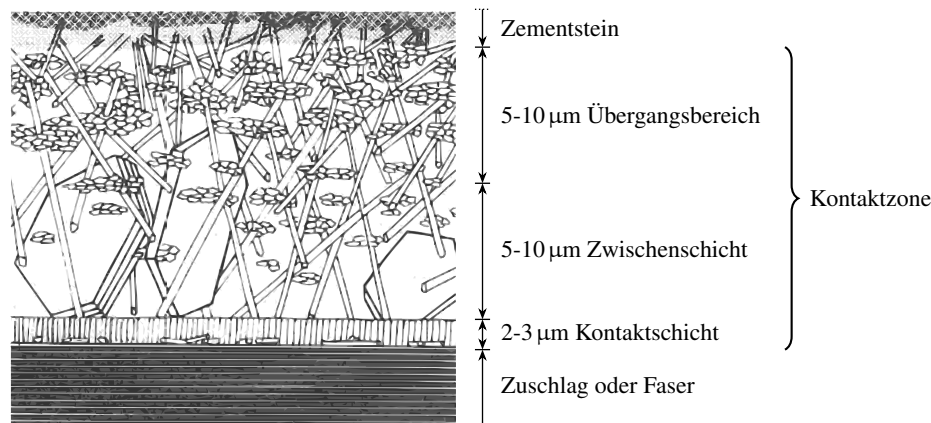


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Kontaktzone zwischen Zuschlag und Zementsteinmatrix in normalfestem Beton nach [RDZ77]

Für eine mechanismenorientierte Beschreibung des Verbundverhaltens ist die detaillierte Kenntnis der mikrophysikalischen Interaktionen der Komponenten in der Verbundzone essenziell. Anders als bei Normalbeton gilt aufgrund der offenbar gleichen Materialeigenschaften wie in der Bindemittelmatrix die Betrachtung der Grenzschicht als die Faser umgebende Fläche ohne eine physikalische Dicke als gerechtfertigt [Ste13], [SRRSD19]. Das Verbundverhalten beschreibt also die Reaktion der Komponenten auf einen Spannungs-Deformations-Zustand bei Kontakt der Oberflächen, vgl. Kapitel 4.2 und 5.2. Diese Kontaktreaktion ist dabei wesentlich von der Geometrie und Beschaffenheit der Kontaktflächen sowie von den Materialeigenschaften der beteiligten Werkstoffkomponenten abhängig, eine genauere Auseinandersetzung mit Einflussparametern erfolgt in Abschnitt 3.4.

### 3.1.2 Mikrophysikalische Verbundwirkung

Charakteristisch für das Verbundverhalten von Stahlfasern in einer zementgebundenen Matrix ist der Übergang zwischen starrem und verschieblichem Verbund, was sich häufig in der Modellierung mithilfe von abschnittsweise definierten Verbundgesetzen widerspiegelt, vgl. Kapitel 4.1. Die Ablösung (*engl.* debonding) der Faser von der Betonmatrix führt dadurch zu einer wesentlichen Änderung des Auszugverhaltens, wie es in Faserauszugversuchen beobachtet wird,

vgl. Abschnitt 3.3. So unterscheiden sich auch die Wirkmechanismen der Kraftübertragung in den beiden charakteristischen Verbundphasen voneinander.

Im unbelasteten Initialzustand sind die Oberflächen der Fasern und der Matrix starr miteinander verbunden. Bei gleichmäßiger Verformung der Komponenten des Verbundwerkstoffes als Verbundkörper werden ohne auftretende Relativverschiebungen in der Kontaktzone Spannungen übertragen. Grundsätzlich kann die Kraftübertragung im starren Verbund dabei durch drei Kategorien von Verbundmechanismen geprägt sein, nämlich

- durch Stoffschluss,
- durch Kraftschluss oder
- durch Formschluss.

Als Stoffschluss wird eine Verbindung zwischen den Atomen oder Molekülen der beteiligten Komponenten bezeichnet. Die Auflösung dieses Verbundmechanismus ist im Allgemeinen ohne eine Veränderung oder Beeinflussung der beteiligten Stoffe auf Molekül- oder Atomebene nicht reversibel. In Faserbetonen wirkt als Folge der chemisch-physikalischen Erhärtungsprozesse zwischen den Kontaktflächen der glatten Mikrostahtfasern und der dichten UHPC-Matrix im starren Verbund eine physikalische Adhäsion, induziert von intermolekularen Wechselwirkungen und Nebenvalenzbindungen, wie beispielsweise Van-der-Waals-Kräften oder Säure-Base-Interaktionen. Trotz des geringen Wasser-Zement-Wertes bei UHPC findet nach JUHART bei Kontakt der Materialien Stahl und Beton bei Raumtemperatur, d. h. ohne die benötigte Aktivierungsenergie, wahrscheinlich keine Bildung von Hauptvalenzbindungen, also chemischen Bindungen, zwischen den Molekülen der CSH-Phasen des Zementes und der Stahloberfläche statt [Juh11]. Analog dazu wird eine chemische Bindung zwischen den Phasen des Zementsteins und einer Messingschicht um die Stahlfaser im Rahmen dieser Arbeit ausgeschlossen, da wissenschaftliche Untersuchungen und Belege dazu bislang nicht bekannt sind.

Als Kraftschluss wird eine Verbindung zweier Oberflächen durch eine Normalkraft bezeichnet, die nur durch die Überwindung des entstandenen Haftreibungswiderstandes gelöst werden kann. Dieser Verbundmechanismus ist abhängig von dem umgebenden Spannungszustand und damit reproduzierbar. Sollte aufgrund der Ablösung der Komponenten voneinander eine Verringerung des Reibkoeffizienten durch eine Schädigung oder einen Abrieb der Oberflächen entstehen, kann der Verbundmechanismus nur mit verringertem Verbundwiderstand reaktiviert werden. In Abhängigkeit des dreidimensionalen Spannungszustandes um die Verbundzone tritt beim Verbund von glatten Mikrostahtfasern mit der Betonmatrix Haftreibung auf. Inwieweit das ausgeprägte Schwindverhalten von ultrahochfestem Beton die Ausbildung von Haftreibungskräften in der Verbundzone beeinflusst und zu einer Kontaktpressung durch Schrumpfung der Betonmatrix und einem resultierenden hydrostatischen Druckspannungszustand auf die Kontaktfläche, wie von ORANGE ET AL. beobachtet, oder zur Bildung von Kontaktzonenrissen und damit zur frühzeitigen Ablösung (auch Pseudo-Debonding) der Faser von der Matrix wie bei BENTUR ET AL. führt, ist bislang für ultrahochfesten Faserbeton nicht hinreichend untersucht worden [BDM85], [OAV99], siehe auch Abschnitt 3.2. Eine Abhängigkeit der Kraftübertragung im starren Verbund von einwirkendem Querdruck ist dennoch mikrophysikalisch plausibel. Eine genauere Betrachtung der Normalspannungsentwicklung und des Einflusses auf die Verbundwirkung erfolgt in Abschnitt 3.2.

Als Formschluss wird eine Verbindung zweier Komponenten durch eine Verzahnung oder ein Ineinandergreifen bezeichnet. Je nach geometrischer Ausbildung ist das Auflösen dieser Verzahnung häufig mit einer Schädigung der Kontaktfläche verbunden. Aufgrund dieser Schädigung ist der Verbundmechanismus nicht vollständig reproduzierbar, gegebenenfalls jedoch bei verringertem Verbundwiderstand in Teilen wirksam. Nach JUHART resultiert aus der geometrischen Struktur der Kontaktflächen und der Kohäsion der Komponenten eine mikromechanische Verklammerung oder Mikroverzahnung [Juh11]. Entsprechend den experimentellen Untersuchungen von STENGEL existiert eine mikroskopische Verzahnung zwischen den Oberflächen der Mikrostaalfaser und der UHPC-Matrix in Form von ineinandergreifenden UHPC-Mikrorippen und Mikro-Kragarmen auf der makroskopisch glatten Stahl- oder Messingoberfläche, welche durch eine Anlagerung von feinsten Betonpartikeln und klebstoffartigem Zementleim in den herstellungsbedingt auf der Faseroberfläche vorhandenen Riefen und Oberflächendefekten entstehen [Ste13]. Seinen Untersuchungen zufolge trägt dieser Formverbund wesentlich zur Qualität des starren, aber auch des verschieblichen Verbundes bei. Auch REHM beschreibt die Bedeutung einer Verzahnung der augenscheinlich glatten Kontaktflächen als entscheidend im Bezug auf das Verbundverhalten von glatten Bewehrungsstäben und der umgebenden Betonmatrix [Reh61]. Insgesamt ist jedoch nicht geklärt, welchen Anteil an der Kraftübertragung eine solche Verzahnung potenziell hat.

Charakteristisch für den starren Verbund ist die Proportionalität der Verbundreaktion zur aufgebrachten Beanspruchung. Die genannten Mechanismen des starren Verbundes versagen bei einer Überschreitung der initialen Verbundfestigkeit, wobei nach JUHART die Haftzugfestigkeit der Grenzschicht bei Querkzugbeanspruchung und die Haftscherfestigkeit bei Scherbeanspruchung gemeint ist, spontan mit der Bildung eines Kontaktzonenrisses innerhalb der Verbundzone zwischen den Komponenten [Juh11], [BDM85], [QWMW18]. Diese Verbundfestigkeit gilt bei glatten Verbundoberflächen als maximaler Verbundwiderstand. Im Gegensatz dazu wird der größte Verbundwiderstand bei in Beton eingebettetem, gerippten Bewehrungsstahl erst nach der Ablösung der Kontaktflächen voneinander erreicht, wenn der maßgebende Verbundmechanismus der mechanischen Interaktion der Stahlrippen mit dem umgebenden Beton vollständig ausgenutzt wird.

Sofern die eingebetteten Fasern eine makroskopische Verankerung oder Profilierung der Oberfläche, wie z. B. eine Endverankerung, Wellung oder Verdrillung, aufweisen, ist auch der Verbundmechanismus der mechanischen Verankerung maßgebend für das Spannungs-Deformationsverhalten in der Übergangsphase zwischen starrem und verschieblichem Verbund [Mül14]. Nach NAAMAN kann auch die Interaktion von benachbarten Fasern bei hohen Fasergehalten das Verbundverhalten hinsichtlich einer sogenannten „Verfaltung“, also einer mechanischen Verankerung in oder an benachbarten Fasern, signifikant beeinflussen [Naa00].

Nach der Auflösung des starren Verbundes beginnt mit dem Einsetzen von Relativverschiebungen zwischen den Komponenten die zweite Phase des Verbundverhaltens. Die physikalische Adhäsion gilt dann aufgrund der Entfernung der Kontaktflächen voneinander als unwiederbringlich zerstört. Die anfängliche Haftreibung geht mit der Ablösung der Faser von der Matrix in eine ebenfalls querdruckabhängige Gleitreibung über. Des Weiteren wird die Mikroverzahnung mit Einsetzen der Relativverschiebung nach STENGEL zunächst durch Abscheren überwunden, wobei auch Partikel der Grenzschicht an der Faser haften bleiben [Ste13], [QWMW18]. Mit zunehmender Relativverschiebung in der Verbundzone kann jedoch eine Verkeilung (*engl.* interlocking) der angestauten Betonpartikel untereinander und mit der abgeriebenen Betonoberfläche innerhalb des Faserkanals auftreten, wie von STENGEL und WILLE & NAAMAN in Faseraus-

zugversuchen beobachtet [Ste13], [WN12]. Hinreichende experimentelle Untersuchungen zu Interlocking-Effekten auf der Mikroebene, im Folgenden als Mikro-Interlocking bezeichnet, sind bislang nicht bekannt.

Charakteristisch für den verschieblichen Verbund bei Stahlfaserbetonen ist der mit zunehmender Verschiebung verringerte Verbundwiderstand infolge einer fortschreitenden Schädigung der Verbundzone. Diese Schädigung ist unabhängig von der Verschiebungsrichtung und wächst auch bei wechselnder Beanspruchungsrichtung an. Das Versagen des verschieblichen Verbundes, welches zu einer fehlenden Übertragung von Verbundreaktionen führt, wird durch einen Kontaktverlust der Oberflächen zum Beispiel infolge einer Ausdehnung des Faserkanals oder einer Querkontraktion der Faser oder durch eine vollständige Schädigung der Verbundzone herbeigeführt.

Bei glatten Faseroberflächen ist im Allgemeinen die initiale Verbundfestigkeit bei starrem Verbund größer als die Verbundfestigkeit bei verschieblichem Verbund, vgl. z. B. [Reh61]. In der folgenden Abbildung 3.2 sind potenzielle Verläufe der in den beiden Verbundphasen wirksamen Verbundmechanismen über die in einer gemeinsamen Dehnung  $\varepsilon$  und einer Relativverschiebung  $\delta$  resultierende Beanspruchung vereinfacht dargestellt. Dabei wird Kontaktpressung vorausgesetzt und die Degradation der Verbundkapazität qualitativ berücksichtigt.

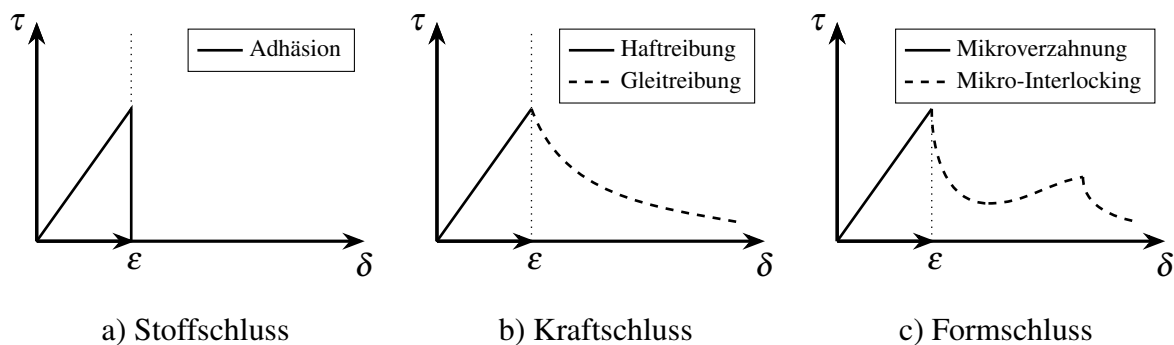


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Verbundwirkung mit Verbundmechanismen

## 3.2 Normalspannungsentwicklung

Von Untersuchungen an geripptem Bewehrungsstahl ist bekannt, dass das Herausziehen von Stäben aus dem Beton mit einer signifikanten Querdruckentwicklung einhergeht, vgl. z. B. [Tep73], [LM77], [Rit14]. Auch für Böden mit hoher Packungsdichte und Scherfestigkeit ist ein dilatierendes Verhalten infolge von Scherbeanspruchungen, d. h. eine Volumenzunahme bei parallelen Relativverschiebungen in einer Grenzschicht, charakteristisch. Dagegen wird der Entwicklung einer Kontaktpressung infolge von Relativverschiebungen bei glatten Fasern ohne eine Oberflächenprofilierung eine eher untergeordnete Bedeutung beigemessen, wie die folgende Analyse zeigt. Da die Reibung jedoch ein wesentlicher Verbundmechanismus für das Verbundverhalten von Mikrofasern in UHPC darstellt, stellt die Entstehung von Querdruck in der Verbundzone ein wichtiger Einflussfaktor auf die Verbundwirkung dar. Im Folgenden wird daher das Potenzial zur Entwicklung von Normalspannungen in der Verbundzone für glatte Fasern analysiert.

### 3.2.1 Ein- und dreidimensionale Querdruckabhängigkeit

Die Verbundmechanismen Haftreibung und Gleitreibung in der Kategorie des kraftschlüssigen Verbundes sind induziert und quantitativ bestimmt durch den dreidimensionalen Spannungszustand und vor allem durch die radiale Kontaktpressung in der Verbundzone. Neben radialen Druckspannungen haben auch Zugspannungen einen Einfluss auf die Verbundreaktion. Während des starren Verbundes gilt die Haftzugfestigkeit als Grenzwert der Kraftübertragung senkrecht zur Kontaktfläche. Bei Überschreitung dieser Haftzugfestigkeit entfernen sich die Oberflächen der Komponenten voneinander und es kommt zum Kontaktverlust. Damit einhergehend kann auch keine Verbundspannung zwischen den Oberflächen übertragen werden, vgl. Abschnitt 3.1.

Den Überlegungen von BARTOS folgend sind im Wesentlichen Spannungszustände aus ein- und dreidimensionalen Effekten zu unterscheiden. Zu den eindimensionalen Ursachen zählt die Entwicklung von Normalspannungen in der Verbundzone infolge von spannungsinduzierter Querkontraktion der Faser oder der Matrix im Rahmen der Faseraktivierung und des Faserausuges. Bei elastischem Materialverhalten gehen Querdehnungseffekte auf die Poissonzahl zurück, bei plastischem Materialverhalten etwa auf eine Einschnürung [Bar81]. Die Verbundnormalspannung kann dabei entweder in der Nähe eines Risses aufgrund der Spannungsunterschiede zwischen der rissüberbrückenden Faser und der gerissenen Betonmatrix oder bei ungerissenem Faserbeton unter eindimensionaler Zug- oder Druckbeanspruchung aufgrund der unterschiedlichen Querdehnzahlen der Materialien Stahl und Beton beeinflusst werden. Das Kriech- respektive Relaxationsvermögen von Matrix und Faser können bei statischer Beanspruchung über einen längeren Zeitraum die entstehenden Spannungen abbauen.

Ein weiterer eindimensionaler Effekt ist die Entwicklung von Dilatanz und damit verbunden die Generierung von Querkug- oder Querdruckspannungen in der Verbundzone durch die Verbundreaktion selbst. So kann es etwa beim Übergang zwischen starrem und verschieblichem Verbund durch das Abscheren einer Verzahnung, die Reibung unebener Flächen aufeinander oder durch die Aufhebung von Adhäsionszugspannungen zu einer Volumenzunahme in der Grenzschicht und einer Entfernung der Oberflächen voneinander kommen. Bei fortschreitender Relativverschiebung zwischen den Kontaktflächen kann reibungs- und verzahnungsbedingt eine Verfeinerung oder auch Anhäufung von Betonpartikeln auftreten, die zu einer weiteren Volumenab- oder zunahme beitragen. In Abhängigkeit der Nachgiebigkeit der umgebenden Matrix werden infolge dieser Dilatanzentwicklungen auch die Verbundnormalspannungen beeinflusst.

Deutlich komplexere Spannungs- und Dehnungszustände werden durch dreidimensionale Effekte erzeugt. Dazu zählen Eigenspannungszustände innerhalb des Verbundwerkstoffes infolge von materialbedingt behinderten Verformungen aufgrund von chemischem oder autogenem Schwinden sowie Temperaturänderungen. Auch äußerlich einwirkende, dreidimensionale Belastungszustände können eine Verbundnormalspannung hervorrufen. Bei isotropem Materialverhalten erfolgt zunächst eine gleichförmige Kontraktion oder Ausdehnung der Betonmatrix. Bei starrem Verbund zwischen Fasern und Matrix stellt die vergleichsweise steife Stahlfaser eine Dehnungsbehinderung in Quer- und in Längsrichtung dar und erfährt somit einen Druck- oder Zugspannungszustand. Es herrscht damit ein Eigenspannungszustand in der Verbundzone. In der Literatur wird der dreidimensionale Spannungszustand in der Verbundzone häufig durch eine ebene Betrachtung im Hinblick auf die Radialdruckspannung in der Kontaktzone vereinfacht, vgl. [PT78a], [NNAN91]. BARTOS ist im Bezug auf normalfesten Stahlfaserbeton der Ansicht, dass dieser radiale Druckspannungszustand in der Grenzschicht aufgrund der Volumenänderung der Matrix bei den vorherrschenden kleinen Faserdurchmessern nur gering ausfällt, verweist

gleichzeitig jedoch auf eine mögliche Rissbildung in der Kontaktzone und die damit verbundene Beeinflussung der Verbundwirkung [Bar81]. Über den Spannungszustand entlang der Verbundzone in Richtung der Faserlängsachse, welcher nur bei starrem Verbund ohne Kontaktzonenrisse auftreten kann, äußert er sich hingegen nicht. Häufig wird der stahlfaserverstärkte Beton gerade durch den unterschiedlichen Einfluss der Fasern entlang und quer zur Faserachse als anisotrop bewertet, vgl. z. B. [Spe08]. Erst bei statistisch gleichverteilter Faserorientierung und homogener Faserverteilung wird dem Stahlfaserbeton makroskopisch ein näherungsweise isotropes Materialverhalten unterstellt.

### 3.2.2 Experimentelle Untersuchungen

Im Rahmen ihrer experimentellen Faserauszugversuche mit unterschiedlich rauen Faseroberflächen stellten PINCHIN & TABOR einen signifikanten Einfluss einer von außen aufgetragenen Umschnürung auf den Verbundwiderstand fest [PT78a]. LEUNG & GENG untersuchten ihrerseits die Auswirkungen von Querdruck- und Querkzugbeanspruchungen auf das Auszugverhalten und insbesondere den Auszugwiderstand und bringen dazu auf ihre rechteckigen Versuchskörper in eine der Querrichtungen über die gesamte Versuchsdauer eine zusätzliche konstante Beanspruchung auf [LG95]. Obwohl die Kontaktspannung um die eingebettete Faser dadurch nicht rotationssymmetrisch ist, stellen sie infolge von Querdruck oder -zug proportional zur aufgetragenen Spannung erhöhte oder verringerte maximale Auszugwiderstände fest [LG95].

Für in ultrahochfestem Beton eingebettete Fasern sind keine experimentellen Untersuchungen des Einflusses einer aufgetragenen Querdruckspannung bekannt. STENGEL schreibt den querdruckabhängigen Verbundmechanismen der Haft- und Gleitreibung jedoch auf Basis der eigenen Faserauszugversuche mit unterschiedlichen Oberflächenrauigkeiten und überschlägigen Berechnungen von Reibkoeffizienten und Radialdruckspannung insgesamt nur eine untergeordnete Bedeutung für den Verbundwiderstand zu [Ste13]. Eine durch eine Dilatanzentwicklung entstehende Aufweitung der Verbundzone ist ebenfalls nicht experimentell belegt. Dennoch sind theoretische Überlegungen dazu ein wichtiger Bestandteil der Modellierung des Verbundverhaltens, vgl. Kapitel 4.2.

Bei profilierten Oberflächen wie etwa beim gerippten Betonstahl ist die Bedeutung von Kontaktspannungen hingegen erheblich größer. Insbesondere der durch den Verbund induzierte Aufbau von Querdruckspannungen im Verbundverhalten zwischen geripptem Betonstahl und der umgebenden Betonmatrix gilt als maßgebender Einflussfaktor auf den Verbundwiderstand und die Verankerungswirkung. Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Entwicklung und zum Einfluss von Verbundnormalspannungen auf das Auszugverhalten von geripptem Bewehrungsstahl aus einer Betonmatrix zeigen die große Bedeutung der querdruckabhängigen Verbundmechanismen, dabei insbesondere die Abstützung von Betondruckstreben auf den Stahlrippen, veranschaulicht im Druckkegel-Zugring-Modell nach TEPFERS, für den Verbundwiderstand [Tep73], [TO92], [LM77], [Rit14].

### 3.2.3 Theoretische Überlegungen

Die folgenden theoretischen Untersuchungen erlauben eine qualitative und quantitative Einschätzung der dehnungsbehindernden Wirkung der Faser und des damit verbundenen Spannungs-Deformations-Verhaltens in der Kontaktzone. Dafür wird sowohl für die Betonmatrix als auch für die eingebettete Stahlfaser eine homogene Verteilung der Materialeigenschaften und isotropes,

linear-elastisches Materialverhalten unterstellt. Beim Zusammenwirken als Verbundwerkstoff ist das Materialverhalten durch die Ausrichtung der schlanken Faser, die eine inhomogene Steifigkeitsverteilung im Probekörper bedeutet, anisotrop. Aufgrund der Rotationssymmetrie der Struktur und der Belastung um die Faser bietet sich die Einführung der in Abbildung 3.3 dargestellten Zylinderkoordinaten an. Der rotationssymmetrische Spannungs-Deformations-Zustand ist unabhängig von der axialen Koordinate  $z$ . Die drei Koordinatenrichtungen radial  $r$ , tangential respektive in Umfangsrichtung  $\theta$  und axial  $z$  sind gleichzeitig Verzerrungs- und Spannungshauptrichtungen und das Ebenbleiben der Querschnitte mit  $\varepsilon_{rz} = 0$  und  $\varepsilon_{\theta z} = 0$  führt zu einer konstanten Dehnung  $\varepsilon_{zz}$  in Faserlängsrichtung.

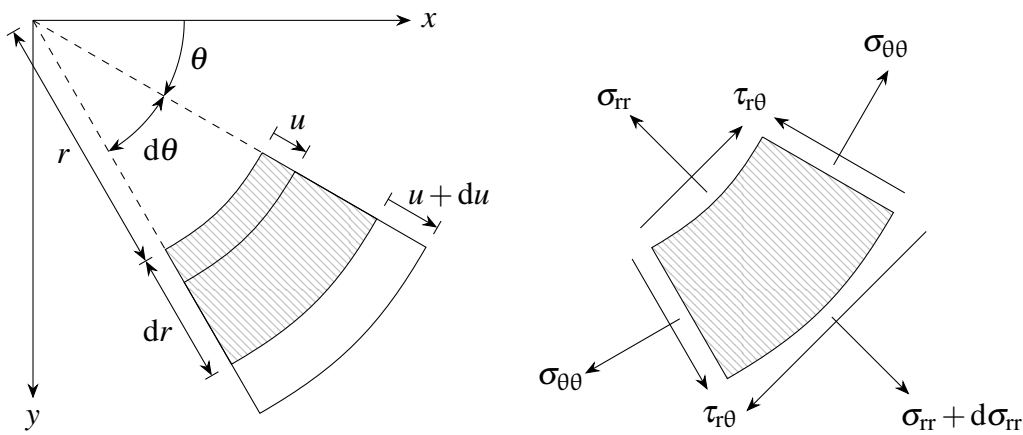


Abbildung 3.3: Verschiebungen und Spannungen am differentiellen Element eines dickwandigen Hohlzylinders in Zylinderkoordinaten nach [TG87], [Läp11]

Bei Beanspruchung in Richtung der Längsachse und damit auftretender axialer Dehnung  $\varepsilon_{zz} \neq 0$  kann die Idealisierung als räumlicher Formänderungszustand erfolgen, während für eine Behinderung der Längsdehnung  $\varepsilon_{zz} = 0$ , beispielsweise bei lokaler Betrachtung einer sehr langen Faser, ein räumlicher Verzerrungszustand vorherrscht [MH18]. Es stellt sich unabhängig von der gewählten Modellierung ein räumlicher Spannungszustand mit  $\sigma_{zz} \neq 0$  ein. In Analogie zur zweidimensionalen Betrachtung nach TIMOSHENKO's „Shrink-Fit“-Theorie soll im Folgenden der räumliche Spannungszustand in der Kontaktzone für eine gleichförmige Volumenverkleinerung der Matrix als Ersatz für äußere Druckbeanspruchungen oder Schwindverformungen ausgewertet werden, vgl. [TG87]. Die Faser wird als ideal runder Zylinder mit dem Radius  $r_f$  modelliert, umgeben von einem dickwandigen Hohlzylinder mit einem endlichen Außenradius  $r_m$ . Für die Betrachtung des Spannungs-Deformations-Zustandes um die Faser sind sowohl die Faserlänge als auch die Dicke der Betondeckung am eingebetteten Faserende unerheblich, da die Spannungs- und Dehnungsverteilungen in der Kontaktzone von der axialen Koordinate  $z$  unabhängig sind.

Die linearisierten kinematischen Beziehungen bei Rotationssymmetrie und Unabhängigkeit des rotationssymmetrischen Verzerrungszustandes von der Axialrichtung mit  $\varepsilon_{rz} = 0$  und  $\varepsilon_{\theta z} = 0$ , wodurch das Ebenbleiben der Querschnitte gekennzeichnet ist, lauten für die Verzerrungshauptrichtungen in Zylinderkoordinaten, dargestellt in Abbildung 3.3,

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (3.1)$$

worin  $w$  die axiale Verschiebung in  $z$ -Richtung beschreibt [MH18]. Mit  $\tau_{rz} = 0$  in Verbindung mit dem verallgemeinerten HOOKE'schen Gesetz für Rotationssymmetrie zur Beschreibung von isotropem Werkstoffverhalten

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

und den auf statische Probleme reduzierten CAUCHY'schen Bewegungsgleichungen als Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

kann das Spannungs-Deformations-Verhalten für spezielle Randbedingungen vollständig beschrieben werden [MH18]. Dabei ergibt sich die radiale Verschiebung  $u$  durch die Differenzialgleichung in Abhängigkeit vom Radius  $r$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (3.4)$$

[MH18], [Tim55]. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (3.4)

$$u = C_1 \cdot r + \frac{C_2}{r} \quad (3.5)$$

muss für den Zylinder (Faser) und den Hohlzylinder (Matrix) an die jeweils gültigen Randbedingungen angepasst werden, um die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  zu bestimmen [Tim55], [MH18]. Im Folgenden werden die Konstanten für Verschiebung der Matrix als  $A$  und  $B$  bezeichnet und für die der Faser als  $C$  und  $D$ . Für eine gültige Beschreibung der Verschiebungskomponente  $u$  in Zylindermitte  $r = 0$  muss für den Zylinder der Faser die Konstante  $D$  respektive  $C_2$  verschwinden, woraus eine im Radius  $r$  konstante Verteilung aller Dehnungen und Spannungen folgt [Tim55]. Die Faserdehnungen  $\varepsilon_{rr,f}$  in radialer und  $\varepsilon_{\theta\theta,f}$  tangentialer Richtung entsprechen nach Gleichung (3.1) genau der Konstante  $C$  beziehungsweise  $C_1$  aus Gleichung (3.5) für die Faser.

Als Randbedingungen sind dann eine axiale und eine radiale Stauchung vorzugeben, die im Falle der gleichförmigen Volumenverkleinerung außerhalb der unmittelbaren Faserumgebung gleich groß und konstant sind, d. h.  $\varepsilon_{rr,m}(r \rightarrow r_m) = \varepsilon_{zz,m} = \text{konstant}$ , vgl. Abbildung 3.4. Aufgrund des starren Verbundes erfahren sowohl Faser als auch Matrix die axiale Stauchung

$$\varepsilon_{zz,m} = \varepsilon_{zz,f} = \varepsilon_{zz,0} \quad (3.6)$$

als Summe von schwind- und lastinduzierten Dehnungsanteilen. Damit kann speziell für den Randbereich der Matrix die radiale Stauchung zu

$$\varepsilon_{rr,m}(r = r_m) = \varepsilon_{rr,0} \quad (3.7)$$

angenommen werden, wobei der Radius  $r_m$  der Matrix signifikant größer als der Faserradius  $r_f$  sein muss, um den Einfluss der Dehnungsbehinderung durch die Faser auf die Stauchung der Matrix zu eliminieren. Aus Gründen des Gleichgewichtes und der geometrischen Verträglichkeit müssen sowohl die radiale Verschiebungskomponente  $u$  als auch die Radialspannung  $\sigma_{rr}$  in der



Kontaktzone stetig sein, d. h. die Bedingungen

$$u_f(r = r_f) = u_m(r = r_f), \quad \sigma_{rr,f}(r = r_f) = \sigma_{rr,m}(r = r_f) \quad (3.8)$$

sind gültig und dienen zusammen mit den übrigen speziellen Randbedingungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten der Lösung der Differenzialgleichung für die Faser und die Matrix jeweils nach Gleichung (3.5).

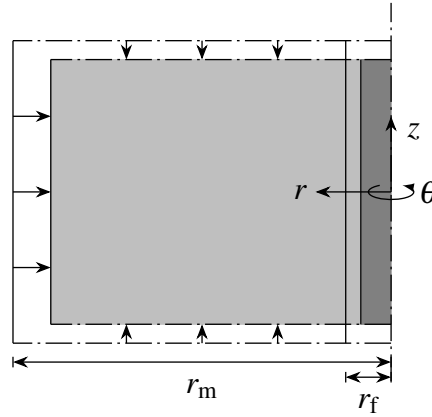


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung des Faser-Matrix-Verbundes als rotationssymmetrischer Ausschnitt unter einer gleichförmigen Volumenverkleinerung

Nach Anpassung der Lösung (3.5) an die inhomogenen Randbedingungen (3.6) und (3.7) und an die Übergangsbedingungen (3.8) ergibt sich mit

$$\mu_f = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)}, \quad \mu_m = \frac{E_m}{(1 + \nu_m)(1 - 2\nu_m)} \quad (3.9)$$

die zweite Konstante  $B$  respektive  $C_2$  aus Gleichung (3.5) für die Matrix zu

$$B = \frac{\mu_f \cdot (\epsilon_{rr,0} + \nu_f \epsilon_{zz,0}) - \mu_m \cdot (\epsilon_{rr,0} + \nu_m \epsilon_{zz,0})}{\mu_m \cdot \left( \frac{1}{r_m^2} - \frac{1}{r_f^2} + \frac{2\nu_m}{r_f^2} \right) - \mu_f \cdot \left( \frac{1}{r_f^2} + \frac{1}{r_m^2} \right)} \quad (3.10)$$

und die übrigen Konstanten  $A$  respektive  $C_1$  für die Faser und  $C$  beziehungsweise  $C_1$  für die Matrix lassen sich mit

$$A = \epsilon_{rr,0} + \frac{B}{r_m^2} \quad (3.11)$$

und

$$C = \epsilon_{rr,0} + \frac{B}{r_m^2} + \frac{B}{r_f^2} \quad (3.12)$$

daraus ableiten. Durch Einsetzen der Verschiebungslösungen  $u_m$  und  $u_f$  in die kinematischen Beziehungen nach Gleichung (3.1) ist der Dehnungszustand für den Zylinderverbund bestimmt. Mithilfe der linearen Elastizitätstheorie nach Gleichung (3.2) wird daraus der Spannungszustand ermittelt.

Die folgende Abbildung 3.5 zeigt die im Radius  $r$  variierenden Spannungs- und Dehnungsverläufe für  $\varepsilon_{rr,0} = \varepsilon_{zz,0} = -0,0001$ , d. h. für eine Schrumpfung um  $0,1 \text{ mm/m}$ . Da die Zusammenhänge linear sind, lässt sich das Ergebnis für andere Schrumpfmaße extrapolieren. Abhängig ist die Entwicklung des Spannungs-Deformations-Zustandes dabei vor allem von der Quer- und Längssteifigkeit des Faser- und des Matrixwerkstoffes. Für das hier gewählte Beispiel werden für die Faser der Elastizitätsmodul von typischen Stahldrähten  $E_f = 200\,000 \text{ N/mm}^2$  und für die ultrahochfeste Betonmatrix vereinfachend der E-Modul  $E_m = 50\,000 \text{ N/mm}^2$  angenommen. Die Querdehnzahlen für Faser und Matrix sind vereinfacht zu  $\nu_f = 0,3$  und  $\nu_m = 0,2$  gewählt. Die Faser weist hier einen Radius von  $r_f = 0,1 \text{ mm}$  auf, die umgebende Betonmatrix hat einen Außenradius von  $r_m = 5 \text{ mm}$ , womit die Bedingung  $r_f \ll r_m$  erfüllt ist, vgl. Abbildung 3.4.

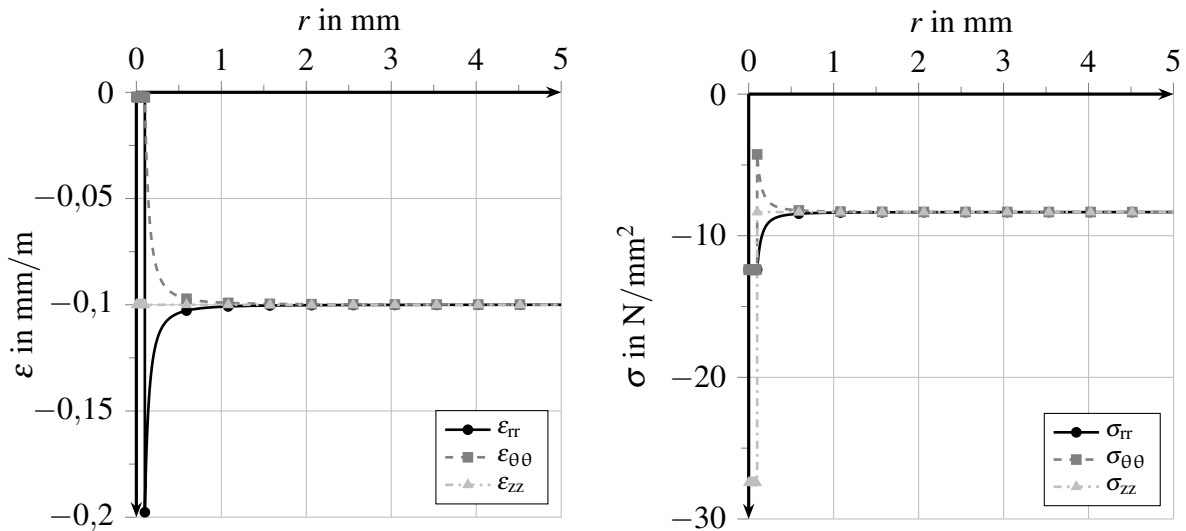


Abbildung 3.5: Dehnungs- und Spannungsverläufe über den Radius von Faser und Matrix bei starrem Verbund für eine Volumenverkleinerung von  $\varepsilon_{rr,0} = \varepsilon_{zz,0} = 0,1 \text{ mm/m}$

Die Kontaktspannung senkrecht zur Faseroberfläche lässt sich im rechten Diagramm in Abbildung 3.5 nach der ersten Nachkommastelle gerundet als  $\sigma_{rr}(r = r_f) = -12,4 \text{ N/mm}^2$  ablesen und entspricht auch der konstanten Querdruckspannung im Faserquerschnitt. Für ein Endschwindmaß von  $\varepsilon_{cs}^\infty = -0,0007$  kann demnach in der Grenzschicht des Faser-Matrix-Verbundes eine Verbundnormalspannung von  $\sigma_{rr}(r = r_f) = 86,8 \text{ N/mm}^2$  entstehen. Aus der Überdrückung der Faser resultiert infolge des starren Verbundes auch eine Druckspannung in Faserlängsrichtung. Die Längsdruckspannung in Fasermitte beträgt gerundet  $\sigma_{zz,f} = -27,4 \text{ N/mm}^2$ , vgl. Abbildung 3.5. Die Matrix erfährt in Richtung der Faserachse eine Druckspannung von ca.  $\sigma_{zz,m} = 8,3 \text{ N/mm}^2$ , welche der Radialdruckspannung außerhalb der unmittelbaren Faserumgebung mit  $\sigma_{rr,m}(r \rightarrow r_m) = 8,3 \text{ N/mm}^2$  entspricht. Die Voraussetzung gleicher Dehnungen von Faser und Matrix im starren Verbund führt also aufgrund der verschiedenen Elastizitätsmoduln zu einem Spannungssprung in der Kontaktzone, der in einer Verbundschubspannung resultiert.

Der in Abbildung 3.5 dargestellte Spannungs-Deformations-Zustand infolge einer Volumenverkleinerung verändert die Verbundwirkung und kann bei entsprechend großer Volumenveränderung eine Vorschädigung der Matrix hervorrufen. Wie in den Spannungsverläufen zu erkennen ist, entwickelt die Matrix außerhalb der unmittelbaren Umgebung der Faser einen isotropen Eigenspannungszustand infolge der mehraxialen Beanspruchung und sich daraus ergebenden statischen Unbestimmtheit. In allen drei Hauptrichtungen werden für die vorgegebene gleich-

förmige Schrumpfung der Matrix von  $\varepsilon_0 = -0,0001$  geringe Druckspannungen generiert, die teilweise oder vollständig durch das zeitabhängige Kriechverhalten des Materials abgebaut werden können. Im Bereich der Kontaktzone stellt die Faser eine zusätzliche Dehnungsbehinderung dar, die die Spannungsverteilung in der Matrix um ca.  $\Delta\sigma_{rr,m} = 4,1 \text{ N/mm}^2$  verändert. Auch der Dehnungszustand wird im Bereich der Faser signifikant beeinflusst. Da in diesem Beispiel keine Zugspannungen und -dehnungen in der Matrix auftreten, ist zunächst keine Mikrorissbildung im Bereich der Kontaktzone zu erwarten, auch wenn ein Vielfaches der hier aufgegebenen Volumenverkleinerung angesetzt wird. Dazu ist anzumerken, dass der Spannungs-Deformations-Zustand im Bereich der Faser auch durch Inhomogenitäten, wie etwa größeren Gesteinskörnern, und Imperfektionen beeinflusst wird und es bei entsprechender Störung der gleichmäßigen Dehnungsverteilung auch zu einer Rissbildung kommen kann. Darüber hinaus wird hier die freie Verformbarkeit der Matrix vorausgesetzt. Eine lokale Verformungsbehinderung etwa bei dichten Faserverteilungen kann eine Mikrorissbildung bei lokaler Überschreitung der Zugfestigkeit zur Folge haben.

Die Kraftübertragung im starren Verbund wird signifikant durch auftretende Volumenveränderungen beeinflusst. Aus den Ergebnissen des Spannungs-Deformations-Zustandes in Abbildung 3.5 kann sowohl eine Verbundnormalspannung als auch eine Verbundschubspannung abgeleitet werden. Durch die Verbundnormalspannung senkrecht auf die Faseroberfläche werden die querdruckabhängigen Verbundmechanismen, i. e. bei starrem Verbund die Haftreibung, aktiviert. Die Verbundschubspannung kann bei einem Endschwindmaß von  $\varepsilon_{cs}^\infty = -0,0007$  Werte von knapp  $\tau_{b,z} = 10 \text{ N/mm}^2$  erreichen, was eine Überschreitung der Verbundfestigkeit und damit die Auflösung des starren Verbundes durch Bildung eines Kontaktzonenrisses zur Folge haben kann. Dieser Effekt beeinträchtigt dann den erreichbaren Auszugswiderstand bei lastinduzierter Rissbildung, vgl. Kapitel 3.3.

Diese Abschätzung der Auswirkungen einer Volumenverkleinerung stellt eine Vereinfachung dar, da die zeitabhängige Entwicklung von Festigkeit, Steifigkeit und auch Schwind Schrumpfung vernachlässigt wird. STENGEL merkt dazu an, dass sowohl für die Schwinddehnung als auch für den Elastizitätsmodul der Betonmatrix ein zeitlich veränderlicher Verlauf berücksichtigt und über die Zeit integriert werden muss, um eine realistische Größenordnung der Kontaktspannung nach der Erhärtung der Matrix zu erhalten [Ste13]. Dabei ist für den zeitlich veränderlichen Spannungs-Deformations-Zustand die Überschreitung zwischenzeitlicher Festigkeitswerte bei verzögerter zeitlicher Entwicklung denkbar.

Eine zweidimensionale Betrachtung der durch TIMOSHENKO beschriebenen „Shrink-Fit“-Konfiguration, die näherungsweise einer Modellierung im ebenen Verzerrungszustand unter Vernachlässigung des Einflusses der axialen Spannung  $\sigma_{zz}$  entspricht, erfolgt von PINCHIN & TABOR und NAAMAN ET AL. [PT78a], [NNAN91]. PINCHIN & TABOR definieren dazu die Fehlpassung  $\delta_r$  (*engl.* fibre-matrix misfit) in Analogie zu TIMOSHENKO als Differenz zwischen dem Faserradius und dem Innenradius des ungefüllten Hohlzylinders der Matrix nach last- und schwindinduzierter Schrumpfung. Die Fehlpassung bezogen auf den Faserdurchmesser entspricht der Dehnung  $\varepsilon_0 = \delta_r/r_f$ , die bei einem signifikanten Größenunterschied der Außenradien, d. h.  $r_f \ll r_m$  vereinfacht eine Radialdruckspannung  $p_r$  von

$$p_r = \frac{\varepsilon_0}{\frac{(1+\nu_m)}{E_m} + \frac{(1-\nu_f)}{E_f}} \quad (3.13)$$

erzeugt [PT78a], [NNAN91]. Unter Berücksichtigung der spannungsinduzierten Querkontrak-

tion der gezogenen Faser als Reduzierung der Fehlpassung ermitteln PINCHIN & TABOR aus dem Kräftegleichgewicht zwischen Stahlfaser und Verbundzone bei ausschließlicher Kraftübertragung durch Gleitreibung die Beziehung zwischen axialer Spannung in der Faser und der Fehlpassung. Mit deren Hilfe schließen sie aus der experimentell gemessenen Faserauszugkraft bei definierter Umschnürung zurück auf die Fehlpassung [PT78a]. NAAMAN ET AL. erweitern diese Beziehungen um eine durch eine Exponentialfunktion beschriebene Verringerung der Fehlpassung in Abhängigkeit des Auszugsweges [NNAN91]. Da hier grundsätzlich der Zusammenhang zwischen der Radialdruckspannung und der Fehlpassung erhalten bleibt, wird diese Erweiterung im Folgenden nicht berücksichtigt. Nach PINCHIN & TABOR kann für die Dehnung  $\varepsilon_0$  der Fehlpassung die Summe der last- und schwindinduzierten Matrixdehnungen angesetzt werden. Für das Beispiel in Abbildung 3.4 wäre also  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{tr,0} = -0,0001$  anzunehmen. Daraus ergibt sich eine Radialdruckspannung von ca.  $p_r = -3,6 \text{ N/mm}^2$ , die deutlich geringer ist als die bei dreidimensionaler Schrumpfung erhaltene Radialspannung  $\sigma_{tr}(r = r_f) = -12,4 \text{ N/mm}^2$ . Die Vernachlässigung der Radialspannung  $\sigma_{zz}$  und ihres Einflusses auf den Spannungs-Deformations-Zustand in der Kontaktzone macht sich hier deutlich bemerkbar. So kommt STENGEL auf der Grundlage seiner Untersuchungen zu dem Ergebnis, dass die querdruckinduzierte Reibung anders als das beobachtete Mikro-Interlocking nur eine untergeordnete Bedeutung für den Auszugswiderstand spielen kann [Ste13].

Für die Bedeutung der querdruckabhängigen Verbundmechanismen, Haftreibung und Gleitreibung, spielt die Entwicklung der Normalspannung in der Verbundzone eine entscheidende Rolle, vgl. Kapitel 3.1. Neben lokalen Veränderungen der Verbundnormalspannung durch die Querkontraktion der Faser oder durch eine Dilatanzentwicklung beim Abscheren der Mikroverzahnung und gegebenenfalls bei Anstauung der gelösten Betonpartikel im Faserkanal, die in Kapitel 4.2 Beachtung finden, beeinflussen Volumenveränderungen der Matrix den globalen Spannungs-Deformations-Zustand der Verbundzone. Es konnte beispielhaft für einen starren Faser-Matrix-Verbund gezeigt werden, dass bei freier Verformbarkeit der Matrix eine Volumenverkleinerung zu einer Überdrückung der eingebetteten Faser führt und daher keine Vorschädigung der Verbundzone infolge von Mikrorissen zu erwarten sind. Aufgrund des gegenüber Normalbetons vergrößerten Elastizitätsmoduls ist der Spannungs-Deformations-Zustand bei Annahme einer gleichen Volumenverkleinerung stärker ausgeprägt. Darüber hinaus ist das zu erwartende Endschwindmaß von UHPC höher als das von normalfestem Beton. Der mit der Betonfestigkeit zunehmenden Bedeutung der Volumenveränderungen eines Faserbetonbauteils ist durch entsprechende Maßnahmen bei der Herstellung, aber auch bei der Planung und Konstruktion, Rechnung zu tragen. Vereinfachend wird für die folgenden Untersuchungen der Verbundzone ein Abbau der schwindinduzierten Verbundeigenspannungen durch Kriechen angenommen. Eine intensive Auseinandersetzung mit den thermisch-hygrischen Prozessen in der Verbundzone bei Erstarrung und Erhärtung des Faserbetons ist nicht Bestandteil dieser Arbeit. Die Modellierung des Verbundverhaltens in Kapitel 4.2 erfolgt daher unter der Annahme einer intakten Verbundzone und unter Berücksichtigung von Verbundnormalspannungen sowie der Entwicklung und Beeinflussung der Kontaktpressung durch den Faserauszug.

### 3.3 Faserauszugversuche

Das Verbundverhalten von Fasern in UHPC wird üblicherweise mithilfe von Faserauszugversuchen charakterisiert. Da auch im Rahmen dieser Arbeit Faserauszugversuche zur Validierung des entwickelten Verbundmodells dienen, werden typische Versuchsbeobachtungen und Heraus-

forderungen bei der Analyse der Versuchsergebnisse im folgenden Kapitel herausgearbeitet. Ergebnisse von numerischen Untersuchungen an Faserauszugversuchen sind in Kapitel 6.2 zu finden.

### 3.3.1 Experimentelle Untersuchungen des Verbundverhaltens

Die experimentelle Analyse des Verbundverhaltens von in Beton eingebetteten Stahleinlagen erfolgt im Regelfall an kleinformatigen Probekörpern mit speziell ausgerichteten, einzeln oder gruppiert angeordneten Stahlfasern oder -stäben, die ein- oder zweiseitig mit bereits getrennten Rissufern einbetoniert werden und eine kontrollierte Lasteinleitung in die Verbundzone beziehungsweise eine zentrische Zugkraft erfahren.

Ziel der Untersuchungen ist die Bestimmung einer Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung für das Verbundverhalten. Während sich für Verbundversuche von in Beton eingebettetem Bewehrungsstahl eine Vielzahl an Versuchsaufbauten mit unterschiedlichem Zweck etabliert hat, werden für Faser-Matrix-Verbundwerkstoffe typischerweise Faserauszugversuche (*engl.* fibre pull-out tests) oder Faserausschiebeversuche (*engl.* fibre push-out tests) durchgeführt und anhand des aus den Messdaten resultierenden Last-Verschiebungs-Diagramms ausgewertet. In Abbildung 3.6 sind beispielhaft typische Probekörper für den Auszug von Stahlfasern aus einer Betonmatrix dargestellt. Für andere Faser- und Matrixmaterialien existiert eine Vielzahl weiterer, teilweise filigranerer Versuchsaufbauten.

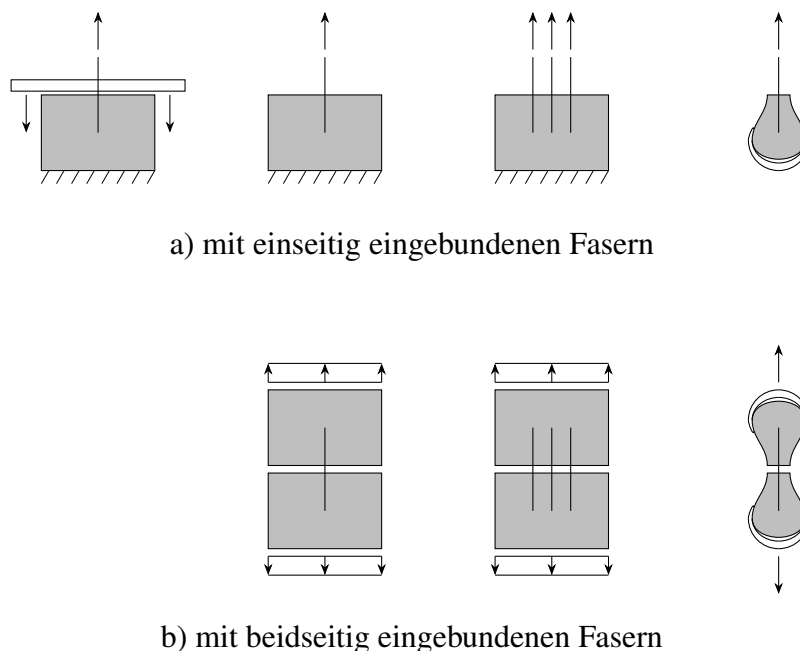


Abbildung 3.6: Beispiele für Probekörper in Faserauszugversuchen nach [Bar81], [Gra83]

Anders als für die bei Faserbetonanwendungen zu den Standard-Begleitkörperprüfungen zählenden Faser-Matrix-Verbundversuche existiert für Verbundversuche mit konventionellem Bewehrungsstahl seit 1970 eine einheitliche Regelung für Auszugversuche nach RILEM, vgl. [Rit14], [RIL70]. Die Übertragung des experimentell festgestellten Auszugverhaltens auf das lokal vorherrschende Verbundverhalten ist bei Auszugversuchen nach RILEM mit konventio-

nellem Bewehrungsstahl mit dem Durchmesser  $d_s$  und einer gleichbleibenden Verbundlänge von  $\ell_b = 5d_s$  direkt durch eine Umrechnung der gemessenen Auszugskraft in eine über die Verbundfläche konstante Verbundspannung möglich [Rit14]. Da die gemessene Verschiebung am rückwärtigen Ende des Bewehrungsstahles, häufig als Endschlupf bezeichnet, direkt Eingang in die Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung findet, ist der Verlauf der Verbundspannung über den fortschreitenden Schlupf direkt aus dem Last-Verschiebungs-Diagramm des Versuches bekannt. Für eine über die Verbundlänge konstante Verbundspannungsverteilung entspricht daher der maximale Auszugswiderstand dem über die Verbundfläche integrierten maximalen Verbundwiderstand.

Auszugversuche mit Ausziehkörpern erlauben Rückschlüsse auf das rissüberbrückende Verhalten von Stahleinlagen und damit auf ihre Tragwirkung im gerissenen Zustand II der Betonmatrix. Mithilfe von Faserauszugversuchen kann also das charakteristische Auszugverhalten der Fasern aus dem starren Faser-Matrix-Verbund experimentell ermittelt werden. Die implizite Annahme glatter Rissufer ohne Kraftübertragung durch mitwirkenden Beton ist dabei für eine eher feinkörnige ultrahochfeste Matrix gerechtfertigt, vgl. Kapitel 2.1. Der bei beginnender Faserbelastung zunächst starre Verbund zwischen Faser und Matrix bei getrennten Rissufern stellt dagegen eine idealisierende Näherung dar, da im Bereich von Rissprozesszonen eher komplexe Spannungszustände vorherrschen, die im Rahmen von Verbundversuchen wie in Abbildung 3.6 nicht abgebildet werden. Die Beteiligung der Fasern am Lastabtrag im ungerissenen Zustand des Betons wird dabei nicht erfasst, vgl. Kapitel 2.2.

### 3.3.2 Auszugversuche von Stahlfasern in UHPC

Experimentelle Untersuchungen zum Auszugverhalten von Stahlfasern in hochfestem und ultrahochfestem Beton wurden in den letzten Jahren in Analogie zu den Faserauszugversuchen an normalfestem Beton unter anderem von MARKOVICH, STENGEL, WILLE & NAAMAN und BREITENBÜCHER & SONG durchgeführt [Mar06], [Ste13], [WN12], [BS14]. Aufgrund der bei UHPFRC üblichen Mikrofasern sind zwar häufig nur sehr geringe Probekörperabmessungen erforderlich, aber eine verbesserte technische Messeinrichtung. Außerdem ist aufgrund der Bedeutung lokaler Imperfektionen, Schädigungen und Inhomogenitäten bei Auszugversuchen aller Art eine signifikante Streuung der Versuchsergebnisse zu erwarten [EPB83].

Eine aktuelle experimentelle Studie zum Auszugverhalten von Stahlfasern aus einer ultrahochfesten Betonmatrix wird von QI ET AL. bereitgestellt [QWMW18]. Darin werden mithilfe von Einzelfaserauszugversuchen mit unterschiedlich langen Stahlfasern mit und ohne Endverankerung die Einflüsse aus der Geometrie, Einbindelänge und Neigung der eingebetteten Fasern auf das Auszugverhalten untersucht. Dazu erfassen sie neben der aus der weggesteuerten Beanspruchung mit einer Beanspruchungsgeschwindigkeit von 1,0 mm/min resultierenden Zugkraft  $P$  die relative Verschiebung zwischen der eingespannten Faserspitze und dem in einer speziellen Stahlform eingeklemmten Betonkörper in Form eines halben Hundeknochens. In der folgenden Abbildung 3.7 sind die gemittelten Versuchsergebnisse von jeweils fünf durchgeführten Versuchen von QI ET AL. für den Auszug von mit ihrer halben Faserlänge in ultrahochfesten Beton eingebetteten Mikrostahtfasern in gemittelten Last-Verschiebungs-Diagrammen dargestellt [QWMW18]. Dabei wird der gemessene Auszugswiderstand  $P$  über den Schlupf  $s$  an der Faserspitze abgetragen, vgl. [QWMW18]. Mithilfe einer näherungsweisen Ermittlung der Faserdehnung im Bereich der freien Faserlänge oberhalb des Betonkörpers kann auf den Schlupf am Faseraustrittsort geschlossen werden. Die Relativverschiebung des eingebetteten Faserendes

hingegen, üblicherweise als Faserendschlupf bezeichnet, ist zusätzlich von der entsprechend des lokalen Verbundwiderstandes verteilten Faserdehnung abhängig und im Allgemeinen nicht messbar.

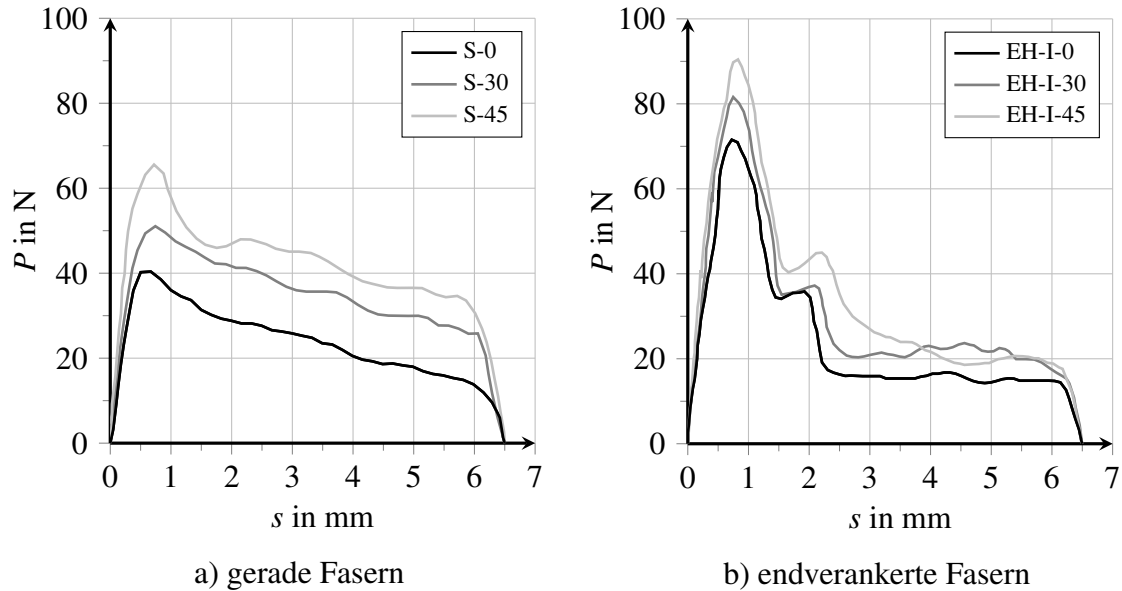


Abbildung 3.7: Experimentell ermitteltes Auszugverhalten von um den Winkel  $\beta \in [0,30,45]$  geneigten Mikrostahtfasern ( $d_f/\ell_f = 0,2/13$  mm) in UHPC aus [QWMW18]

Die Versuchsergebnisse in Abbildung 3.7 zeigen die typischen Verläufe des gemittelten Auszugswiderstandes über den Schlupf für gerade Fasern und für Fasern mit mechanischer Endverankerung. Verwendet wurden hochfeste Mikrostahtfasern mit einem Durchmesser von  $d_f = 0,2$  mm, einer Faserlänge von  $\ell_f = 13$  mm sowie einer Zugfestigkeit von  $f_{st} = 2900$  N/mm<sup>2</sup> [QWMW18]. Die ultrahochfeste Betonmatrix weist entsprechend den Angaben in der Veröffentlichung eine Druckfestigkeit von  $f_{cc} = 151,5$  N/mm<sup>2</sup> auf [QWMW18]. Bei beiden Fasertypen ist zunächst eine nahezu lineare Zunahme der ertragbaren Auszugskraft zu erkennen, die nicht mit einer Relativverschiebung zwischen den Kontaktflächen, sondern einer elastischen Dehnung des Faser-Matrix-Verbundes und insbesondere der Faser über ihre freie Länge einhergeht [QWMW18]. Der maximale Auszugswiderstand ist bei Fasern mit mechanischer Endverankerung aufgrund des zusätzlichen Verbundmechanismus gegenüber den geraden Fasern deutlich vergrößert. Bei einer Einbettung mit einem Neigungswinkel  $\beta$  werden sowohl für gerade als auch geometrisch vorgeformte Fasern die größten Ausziehlasten erreicht, vgl. Abbildung 3.7. Mit zunehmender Verschiebung  $s$  nimmt der Auszugswiderstand bei geraden Fasern bei gleichzeitig verringerter Verbundfläche gleichmäßig ab, bis schlussendlich das Auszugversagen spontan mit dem abrupten Auszug des Faserendes einsetzt und den Versuch beendet.

Auch STENGEL beobachtet in seinen Versuchen eine nahezu lineare Faserauszugsphase [Ste13]. Die folgende Abbildung 3.8 zeigt die Versuchsergebnisse von STENGEL mit den typischen Streuungen der Auszugswiderstände. In dieser Versuchsserie werden hochfeste Mikrostahtfasern mit verschiedenen Faserdurchmessern, und zwar  $d_f = 0,48$  mm in Abbildung 3.8 a) und  $d_f = 0,15$  mm in Abbildung 3.8 b) sowie einer Einbindelänge von  $\ell_e = 5$  mm aus einer feinkörnigen UHPC-Matrix mit einer Betondruckfestigkeit von  $f_{cc} = 213$  N/mm<sup>2</sup> vollständig herausgezogen. Dabei werden die Zugkraft  $P$  und der Maschinenweg aufgezeichnet.

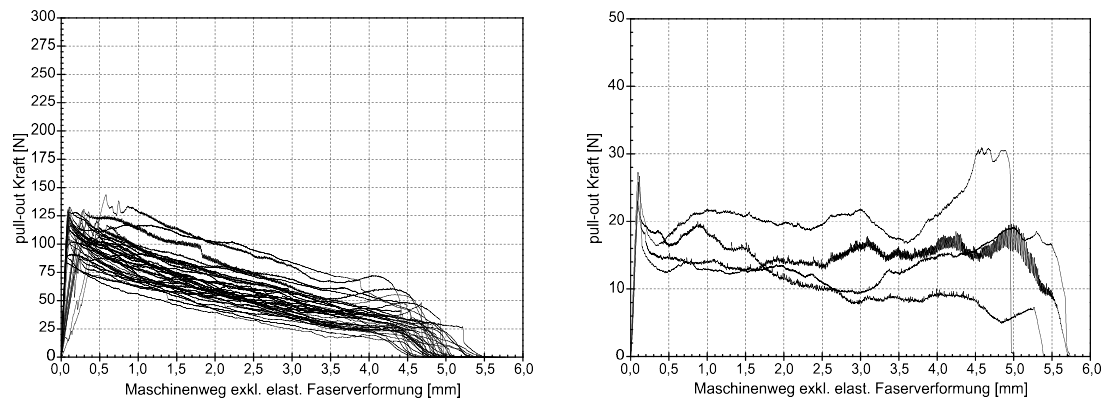
a)  $d_f = 0,48 \text{ mm}$ ,  $\ell_f = 10 \text{ mm}$ b)  $d_f = 0,15 \text{ mm}$ ,  $\ell_f = 10 \text{ mm}$ 

Abbildung 3.8: Experimentell in geraden Faserauszugversuchen ermitteltes Auszugverhalten von geraden Mikrostaahlfasern in UHPC mit typischen Streuungen aus [Ste13]

Bei Fasern mit mechanischer Endverankerung nimmt der Auszugwiderstand in Abbildung 3.7 a) nach dem Maximalwert zunächst rapide ab, bis schließlich ein zweites Plateau oder ein erneuter Anstieg erreicht wird, welcher einer weiteren plastischen Verformung der Endverankerung im abknickenden Faserkanal zugeschrieben wird [QWMW18]. Abschließend stellt sich analog zu geraden Fasern ein gleichmäßiger, nahezu linearer Verlauf des Auszugwiderstandes ein, der spontan mit dem Auszugversagen endet. Die im Faserauszugversuch dissipierte Arbeit wird als Flächeninhalt unter den Verlaufskurven angegeben, wobei die so ermittelte Dissipationsenergie beim Auszug einer geometrisch vorverformten Faser trotz der verbesserten maximalen Auszugkraft nicht größer ist als bei geraden Fasern [QWMW18]. QI ET AL. beschreiben außerdem den teilweise im Bereich der Maximalbelastung bei geometrisch vorgeformten Fasern beobachteten Versagensmodus des Faserreißen [QWMW18]. Der Einfluss der Verbundlänge in Kombination mit dem vergrößerten Faserdurchmesser zeigt sich in einer dritten Versuchsserie mit längeren, endverankerten Fasern, vgl. [QWMW18]. Für die etwa doppelt so große Faserlänge und eine deutlich stärker ausgeprägte Endverankerung gegenüber dem zweiten Fasertyp wird ein etwas mehr als doppelt so großer Auszugwiderstand ermittelt [QWMW18].

Die experimentellen Untersuchungen von QI ET AL. und STENGEL werden im Rahmen dieser Arbeit zur Validierung des entwickelten Verbundmodells verwendet, vgl. Kapitel 6.2. Nähere Informationen zu den Versuchsergebnissen sind an entsprechender Stelle angegeben.

### 3.3.3 Analyse des charakteristischen Auszugverhaltens

Das charakteristische Auszugverhalten von geraden Fasern in einer höherfesten Zementmatrix nach NAAMAN ist in der folgenden Abbildung 3.9 dargestellt, vgl. [Naa99]. Dabei ist analog zu den experimentellen Ergebnissen in Abbildung 3.7 der Auszugwiderstand  $P$  über den Schlupf  $s$  an der Faserspitze abgetragen.

Das durch Entfestigung geprägte Auszugverhalten einer glatten Faser lässt sich in drei charakteristische Phasen unterteilen, die im Folgenden analysiert werden. Zunächst erfolgt die linear-elastische Dehnung des Faser-Matrix-Verbundes infolge der ansteigenden Zugbeanspruchung bis zum Punkt A in Abbildung 3.9.



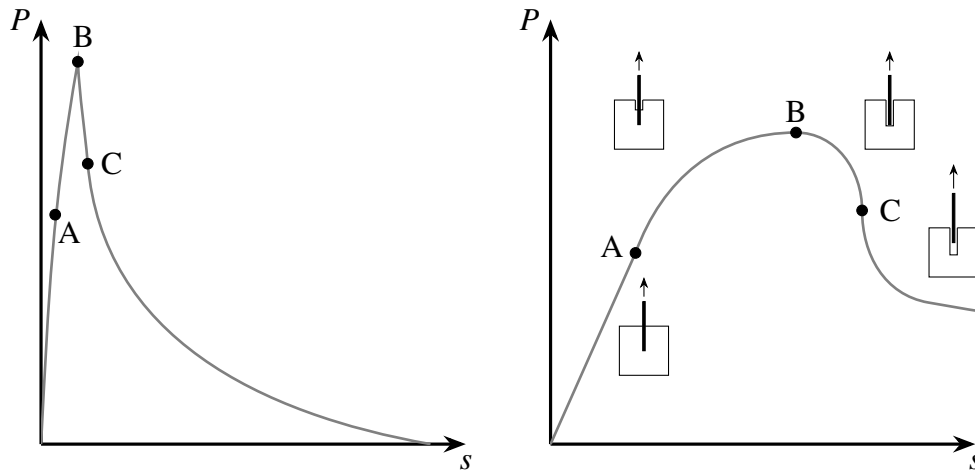


Abbildung 3.9: Schematisches Auszugverhalten von geraden Fasern mit Darstellung der charakteristischen Phasen der Faseraktivierung nach [Naa99]

In dieser ersten Auszugphase herrscht bei Nichtberücksichtigung eventueller Vorschädigungen über die gesamte Verbundlänge starrer Verbund. Während im Bereich der freien Faserlänge oberhalb der Betonoberfläche die maximale Faserlängszugspannung mit gleichförmiger Dehnung auftritt, ist über die Einbindelänge eine kontinuierliche Abnahme der Faserspannung und -dehnung zu erwarten. Die Zugspannungen und -dehnungen in Faser und Matrix sowie auch die Verbundschubspannung in der Verbundzone verlaufen nichtlinear über die Einbindelänge [Law72], [Gra84]. In der folgenden Abbildung 3.10 sind die Zugspannung  $\sigma_f$  in der Faser und die Verbundspannung  $\tau_t$  parallel zur Beanspruchung über die Einbindelänge  $\ell_e$  der Faser in die Matrix dargestellt.

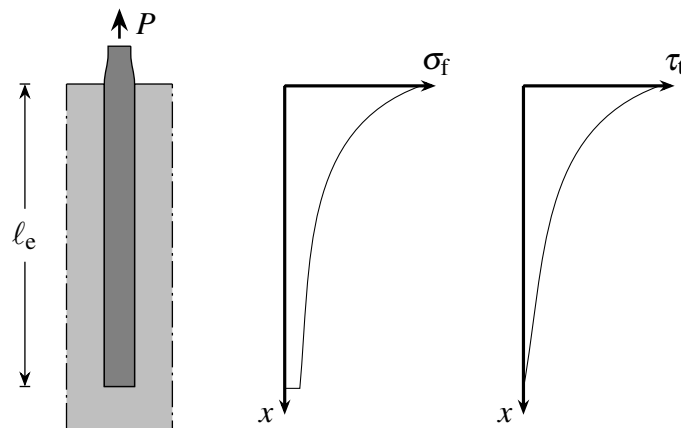


Abbildung 3.10: Schematische Spannungsverteilung in Phase I des Auszugverhaltens

Obwohl in dieser Phase noch keine Verschiebung des eingebetteten Faserendes auftritt, ist die Fasertragwirkung vollständig aktiviert und erfährt eine über ihre Länge stark nichtlinear abnehmende Zugspannung. Analog zur ebenfalls nichtlinearen Dehnung der Faser wird eine Verbundspannung mit nichtlinearem Verlauf über die Verbundlänge generiert, vgl. Abbildung 3.10. Insbesondere bei langen Einbindelängen ist die vereinfachende Ermittlung einer über die Verbundlänge gemittelten Verbundspannung für die Bestimmung der initialen Verbundfestigkeit daher unzureichend. Bei Annahme einer räumlich ausgedehnten Verbundzone mit verzahnten

Oberflächen ist die Entwicklung einer elastischen Relativverschiebung zwischen Faser und Matrix in geringem Maße auch bei starrem Verbund vorstellbar. Analog dazu kann auch die Schubverzerrung der Matrix unmittelbar neben der Faser eine messbare Relativverschiebung zwischen Faser und Matrix bewirken. So beinhaltet die Relativverschiebung in der ersten Phase des Auszugverhaltens sowohl die konstante elastische Dehnung der Einzelkomponenten ober- und unterhalb des Verbundbereiches als auch die Dehnung und Relativverschiebung in der Verbundzone.

Bei Überschreitung der initialen Verbundfestigkeit wird vom Faseraustrittsort an der Betonoberfläche fortschreitend in Richtung des eingebetteten Faserendes ein Kontaktzonenriss gebildet und die Faser von der Matrix abgelöst. Im abgelösten Bereich wird infolge der Dehnungsdifferenz zwischen Faser und Matrix Schlupf generiert, während am eingebetteten Faserende noch keine irreversiblen Relativverschiebungen auftreten. In dieser Phase des Debondings zwischen den charakteristischen Punkten *A* und *B* in Abbildung 3.9 geht der starre Verbund entlang der Einbindelänge in den verschieblichen Verbund über, was eine Änderung der wirksamen Verbundmechanismen mit sich bringt, vgl. Kapitel 3.1. Daraus folgt auch eine von der initialen Verbundfestigkeit unterschiedliche Festigkeit für den verschieblichen Verbund, der mit einer Abflachung des Verlaufes von integrelem Auszugwiderstand über Schlupf einhergeht, vgl. Abbildung 3.9. In Abhängigkeit der Degradation der Verbundzone und der Schlupfdifferenz infolge der weniger behinderten Dehnung der Faser kann im abgelösten Verbundbereich eine konstante bis nichtlineare Verteilung der Verbundspannungen auftreten, vgl. Kapitel 3.1.

Der Auszugwiderstand als Integral des lokalen Verbundwiderstandes über die immer noch gleich bleibende Verbundfläche wird bei einer ausreichend großen Verbundfestigkeit im verschieblichen Verbund weiter vergrößert, d. h. eine Laststeigerung in dieser Phase ist möglich. Umgekehrt bestimmt die Größe des Verbundwiderstandes im abgelösten Verbundbereich bei kraftgesteuerter Versuchsdurchführung und rissüberbrückender Kraftübertragung, ob infolge einer Laststeigerung die Ablösung der Kontaktflächen weiter fortschreitet oder ob zunächst sich ein stabiler Spannungs-Deformations-Zustand einstellt. Bei nicht ausreichend großer Verbundfestigkeit nach Ablösung der Kontaktflächen kommt es ohne eine weitere Laststeigerung zur instabilen Bildung eines vollständigen Kontaktzonenrisses, auch als „katastrophales Debonding“ bezeichnet [Law72]), die einen plötzlich einsetzendes, ruckartiges Faserauszugversagen initiiert.

Analog zu diesem Phänomen kann infolge von Querkontraktion oder -dehnung von Faser und Matrix nach Ablösung auch ein spontaner Kontaktverlust auftreten und das spröde Versagen einleiten, vgl. Abschnitt 3.2. In experimentellen Untersuchungen wird häufig ein Wechsel zwischen ruckartiger Ablösung eines weiteren Anteiles der Verbundlänge mit entsprechendem Zuwachs des gemessenen Schlupfes und linearer Zunahme der Verschiebung bei stabiler Steigerung der Dehnung proportional zur Beanspruchung beobachtet [BG79]. Bei Versuchen mit zusätzlicher Umschnürung des Auszugkörpers und dadurch erhöhter Kontaktpressung stellen LEUNG & GENG eine vergrößerte Ausprägung der gemessenen Sprünge im Faserauszugverhalten [LG95], [GL97]. Denkbare Ursachen für die plötzlich auftretende, instabile Energiefreisetzung bei fortschreitender Ablösung sind vor allem Effekte infolge von Inhomogenitäten in der Verbundzone, die eine Streuung der Verbundfestigkeit über die Verbundfläche bewirken und damit eine stabile und gleichmäßige Ablösung verhindern. Auch der Mechanismus des Mikro-Interlockings kommt als Ursache für Sprünge im gemessenen Auszugwiderstand infrage, vgl. Kapitel 3.1.

Die folgende Abbildung 3.11 zeigt beispielhaft einen möglichen partiellen Ablösungszustand mit der ungleichmäßigen Verteilung der Zugspannungen in der Faser sowie der nichtlinearen

Verbundschubspannung. Die Verbundspannung im Bereich des verschieblichen Verbundes ist dabei in diesem Beispiel geringer als die initiale Verbundfestigkeit.

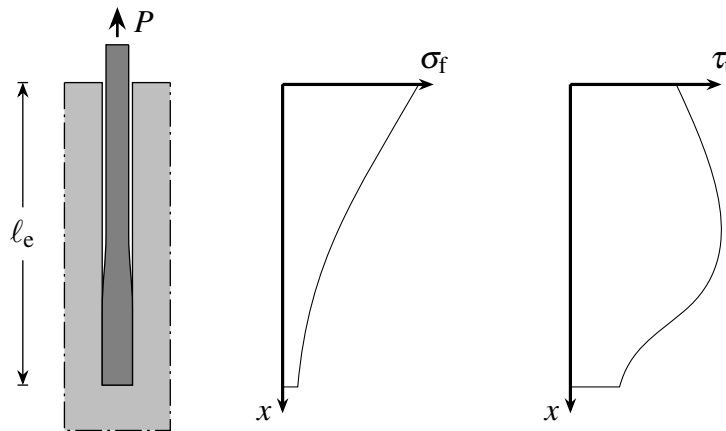


Abbildung 3.11: Schematische Spannungsverteilung in Phase II des Auszugverhaltens

Die Verteilung der Spannungen im Faser-Matrix-Verbund in Abbildung 3.11 zeigt deutlich, dass auch in der zweiten Phase des Auszugverhaltens, welche häufig als Faseraktivierungsphase bezeichnet wird, eine über die Einbindelänge gemittelte Verbundspannung insbesondere bei langen Verbundlängen geringer ist als das lokale Maximum der Verbundschubspannung, welches bei glatten Faseroberflächen im Allgemeinen der „wandernden“ initialen Verbundfestigkeit entspricht, vgl. Abschnitt 3.1. Neben der Verbundlänge beeinflusst vor allem die elastische und plastische Verformungsfähigkeit der Faser im Zusammenspiel mit dem lokalen Verbundwiderstand die beginnende Schlupfentwicklung am Faseraustrittsort und damit die nichtlineare Verbundspannungsverteilung entlang der Einbindelänge.

Kurz bevor die stabil fortschreitende Ablösung der Kontaktflächen voneinander das eingebettete Faserende erreicht, werden die Schlupfdifferenz zwischen dem Faseraustrittsort und dem eingebetteten Faserende und damit verbunden bei gerade Fasern mit glatter Faseroberfläche in der Regel auch der globale Auszugswiderstand maximal. Der integral messbare Auszugswiderstand erreicht in Punkt B sein Maximum, vgl. Abbildung 3.9. Da in dieser Phase eine irreversible Änderung der Verbundwirkung erfolgt, ist eine Ausnutzung des maximalen Auszugswiderstandes in der Bemessung nur hinsichtlich der Tragfähigkeit oder Robustheit eines Faserbetonbauteils zulässig.

Unmittelbar auf die vollständige Ablösung der Kontaktflächen folgend setzt mit dem Auszug der Faser aus der Matrix die dritte Phase des Auszugverhaltens ein. Bei einem eher geringen verbleibenden Verbundwiderstand nach der Ablösung kommt es zu einem ruckartigen Abfall der Ausziehlast (*engl.* load-drop) und einem durch die Entspannung verursachten Nachrutschen des Faserendes, vgl. Abbildung 3.9. Mit dem Nachrutschen erfolgen Spannungsumlagerungen und eine deutliche Abnahme der Schlupfdifferenz. Die experimentelle Erfassung des Bereiches zwischen den charakteristischen Punkten B und C im Auszugverhalten einer geraden Faser ist nahezu unmöglich. Plötzlich und unvermittelt beginnt der kontinuierliche Faserauszug, der ohne die Aktivierung zusätzlicher Verbundmechanismen keine Laststeigerung mehr zulässt.

In experimentellen Untersuchungen von BOWLING & GROVES wird bei einer über weite Teile der Verbundlänge plastifizierten Faser am eingebetteten Faserende eine Art Pfropf (*engl.*

plug) gebildet, da aufgrund der geringfügigen Spannungsübertragung in diesem Bereich nur kleine elastische und plastische Querkontraktionen auftreten [BG79]. Im Vergleich zur häufig sprunghaften Verringerung des Auszugswiderstandes erfolgt bei profilierten oder geometrisch vorverformten Fasertypen nach der Ablösung der Kontaktflächen voneinander eine weitere Steigerung der Ausziehlast durch die Aktivierung der mechanischen Verankerungsmechanismen, vgl. Abbildung 3.7.

Die Faserauszugphase ist bei geraden Fasern mit glatter Oberfläche durch eine Degradation der Verbundkapazität charakterisiert, die mit zunehmendem Schlupf durch eine wachsende Schädigung der Verbundzone induziert wird. Die Differenz zwischen dem Schlupf am Faseraustrittsort und dem Schlupf am eingebetteten Faserende ist in dieser Phase aufgrund des nachlassenden Verbundwiderstandes wesentlich geringer als während der Ablösung. Insbesondere bei langen Verbundlängen ist die Spannungsverteilung in dieser Phase aufgrund der Schlupfdifferenz zwischen dem Faseraustrittsort und dem eingebetteten Faserende immer noch nichtlinear, vgl. Abbildung 3.12. Durch das ruckartige Nachrutschen des eingebetteten Faserendes erfolgt aber auch eine Spannungumlagerung in der Verbundzone, sodass in Phase III ein näherungsweise konstanter Verlauf der Verbundschubspannungen besteht. Neben der Verbundlänge bestimmt daher das Schädigungspotenzial, welches wiederum durch die Beschaffenheit der Kontaktoberflächen und die Verbundnormalspannung maßgeblich beeinflusst wird, die Entwicklung der lokal verbleibenden Verbundfestigkeit und damit die Abweichung der lokalen Extremwerte von der mittleren übertragbaren Verbundspannung. Besonders in dieser Phase des Auszugsverhaltens sind lokale Abweichungen vom mittleren Verbundwiderstand durch den Verbundmechanismus Mikro-Interlocking geprägt, vgl. Kapitel 3.1.

Die folgende Abbildung 3.12 zeigt einen typischen Verlauf ohne Berücksichtigung eines lokal auftretenden Verkeilens von Partikeln in der Verbundzone. Anders als in den vorangegangenen Phasen I und II ist das eingebettete Ende der Faser während des Auszuges nicht mehr gehalten, sodass die Zugspannung hier verschwindet.

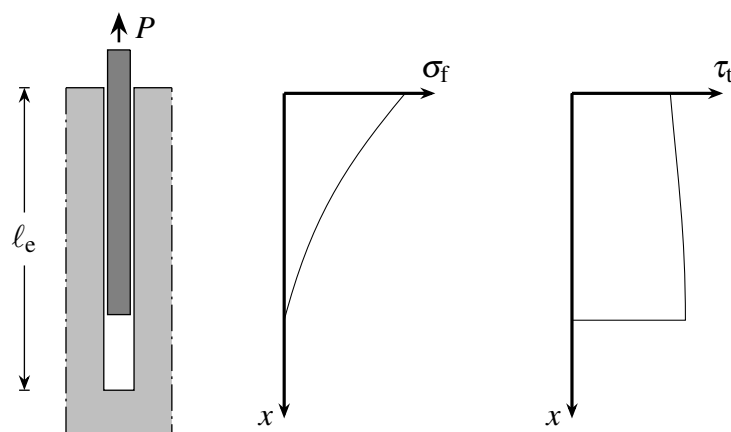


Abbildung 3.12: Schematische Spannungsverteilung in Phase III des Auszugsverhaltens

Ähnliche Verläufe der Spannungsverteilungen in Faser, Matrix und in der Verbundzone gibt PFYL auf Basis einer vereinfachenden analytischen Herleitung von Modellgleichungen zur Kraftübertragung für die ersten beiden der drei Phasen des Auszugsverhaltens an, vgl. [Pfy03]. JUNGWIRTH stellt die Spannungsverteilung für die zweite und dritte Phase des Auszugsverhaltens vereinfachend mit linearen Verläufen über die Einbindelänge dar, vgl. [Jun06]. Eine Überprüfung

der hier angegebenen, in drei Phasen unterschiedenen schematischen Spannungsverteilungen erfolgt in Kapitel 6.2 anhand einer numerischen Simulation des Faserauszugverhaltens mit dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Verbundmodell.

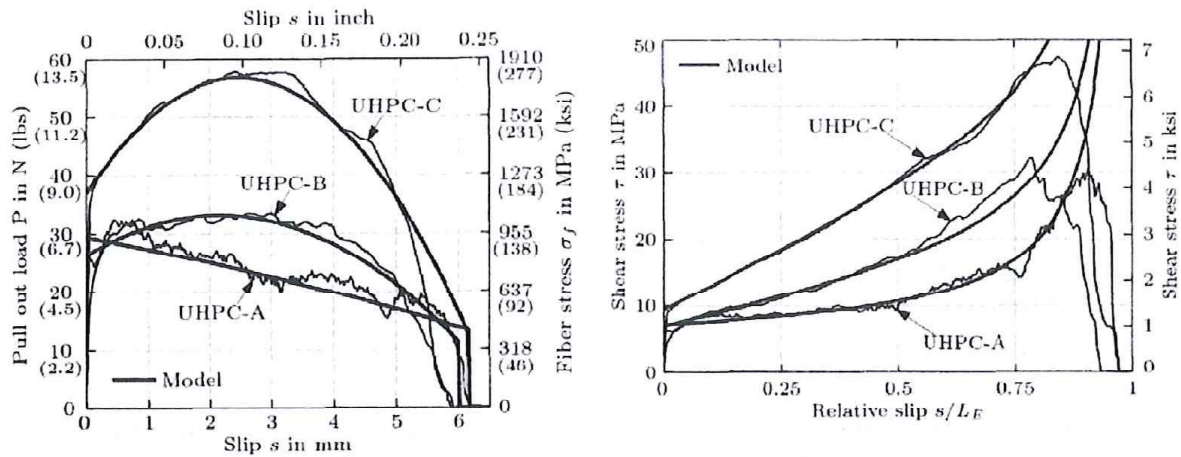


Abbildung 3.13: Auszugverhalten einer hochfesten, vermessigten, geraden Stahlfaser aus UHPC mit drei verschiedenen Zusammensetzungen aus [WN12]

WILLE & NAAMAN beobachten in ihren experimentellen Untersuchungen beim Auszug gerader, vermessigter Stahlfasern aus verschiedenen Betonkörpern mit ultrahochfesten, gefügeoptimierten Zusammensetzungen eine ausgeprägte Verfestigung im Auszugverhalten [WN12]. Sie ermitteln bei zunehmender Relativverschiebung insbesondere gegen Ende des Faserauszuges, wo die Schädigung der Matrixoberfläche im Faserkanal weit fortgeschritten ist, einen signifikanten Anstieg der über die verbleibende Verbundlänge gemittelten Verbundschubspannungen, vgl. Abbildung 3.13, und führen den vergrößerten Verbundwiderstand bei vergleichsweise großen Relativverschiebungen anhand von mikroskopischen Untersuchungen auf das bereits in Kapitel 3.1 beschriebene Phänomen des Mikro-Interlockings infolge optimierter Gefügestrukturen im Verbundbereich bei gleichzeitig signifikant erhöhter Abrasion der vermessigten Faseroberfläche zurück, d. h. auf ein Aufstauen und Verkeilen der zum Teil an der Faser haftenden und frei beweglichen Betonpartikel sowie der abgetragenen Komponenten der Faseroberfläche im Faserkanal [WN12]. Darüber hinaus beeinflusst die nichtlineare Verteilung der Verbundspannungen die Größe des Mittelwertes. Numerische Untersuchungen zur Verbundspannungsverteilung erfolgen in Kapitel 6.2.

Neben dem hinsichtlich der Robustheit erwünschten duktilen Auszugversagen mit der Bildung von Verbund- und Kontaktzonenrissen treten in Abhängigkeit der Konfiguration des Auszugversuches und der jeweiligen Zugfestigkeit der Einzelkomponenten sowie der Verbundfestigkeit in der Kontaktzone auch andere Versagensmodi auf. Bei einer zu geringen Faserzugfestigkeit oder zum Beispiel infolge von langen Verbundlängen oder wirksamen mechanischen Verankerungen zu großem Auszugwiderstand kommt es vor dem Erreichen des maximalen Auszugwiderstandes zum Reißen der Faser, was insbesondere bei hochfesten Stahlfasern bei eher geringen Bruchdehnungen erfolgt. Stellt sich dagegen die zugbeanspruchte Betonmatrix als Schwachstelle des Faser-Matrix-Verbundes heraus, kann es zum Betonbruch kommen. Dieser Versagensmodus tritt häufig bei schiefwinkligen Faserauszugversuchen auf, da der lokale Verbundwiderstand durch die Kontaktpressung im Bereich der Fasermulenkung erhöht ist und ein signifikanter dreidimensionaler Spannungszustand im umgebenden Beton erzeugt wird. Als Folge dieses

Spannungszustandes kann es zu Abplatzungen der Matrix im Bereich des Faseraustrittsortes kommen, was eine signifikante Verkürzung der Verbundlänge darstellt, oder zum Ausbruch eines Betonkegels um die eingebettete Faser. Bei Auszugversuchen mit geripptem Betonstahl tritt zusätzlich ein Spaltbruchversagen der Betonmatrix infolge von Ringzugspannungen auf, welches bei Faserauszugversuchen mit geraden, unprofilierten Fasern keine Rolle spielt.

### 3.3.4 Aussagekraft von Faserauszugversuchen

Obwohl Faserauszugversuche für die experimentelle Untersuchung des Verbundverhaltens eines Faser-Matrix-Verbundes international anerkannt sind, lassen sie nur bedingt Rückschlüsse auf die Tragwirkung von beliebig orientierten und angeordneten Fasern im Faserbeton zu. Zunächst weisen vollständig und im starren Verbund eingebettete Fasern eine im Vergleich zur ersten Phase des Auszugverhaltens umgekehrte Verbundspannungsverteilung auf [Bar81]. Die maximale Verbundspannung tritt dabei am jeweiligen Faserende auf und legt damit die Ausbildung einer Rissprozesszone am Faserende nahe. Ein ausreichend hoher Fasergehalt ist demnach erforderlich, damit anstelle eines Rissverlaufes von Faserende zu Faserende auch den Riss kreuzende Fasern auftreten.

Insbesondere bei hohen Fasergehalten spielt jedoch die gegenseitige Beeinflussung benachbarter oder in Kontakt stehender Fasern eine maßgebende Rolle, was bei üblichen Faserauszugversuchen mit einer Einzelfaser oder einer parallel ausgerichteten Fasergruppe in gleichmäßigem Abstand nicht erfasst wird. Darüber hinaus werden auch Faserauszugversuche mit zyklischer Beanspruchung durchgeführt, um Informationen über die Verbundermüdung zu generieren. Auch hier ist eine Übertragung auf das Ermüdungsverhalten des Verbundwerkstoffes nur bedingt möglich, da eine diskrete Rissöffnung und -schließung nicht nur zu Relativverschiebungen zwischen Faser und Matrix, sondern aufgrund von benachbarten und kreuzenden Fasern auch zu einem mit jedem Lastwechsel veränderten Spannungs-Deformations-Zustand des Faser-Matrix-Verbundes führt, vgl. Kapitel 3.5. Derartige Effekte im ungerissenen Querschnitt und die Bildung und Ausbreitung von ermüdungsbedingten Mikrorissen im Gefüge und in der Verbundzone können mit Faserauszugversuchen nicht abgebildet werden.

Faserauszug- und Faserausschiebeversuche unterscheiden sich wesentlich in ihrem Spannungs-Deformations-Zustand während der zunehmenden Relativverschiebungen in der Kontaktzone vom tatsächlichen, komplexen Spannungs-Deformations-Zustand im Faserverbundwerkstoff, bei dem die Fasertragwirkung aktiviert wird. Je nach Versuchsaufbau erfährt die Betonmatrix bei Faserauszugversuchen eine ein- oder mehraxiale Zug- oder Druckspannung in Richtung der Faserlängsachse, vgl. Abbildung 3.6. Faserausschiebeversuche werden im Allgemeinen zur Nachvollziehung der Faserablösung von der Matrix sowie der Reibungseffekte durchgeführt [LH93]. Ein wesentlicher Vorteil gegenüber Auszugversuchen ist der stabile Kontakt der Faser zur Matrix bedingt durch ihre Querdehnung beim Herausdrücken anstelle des sonst möglichen plötzlichen Kontaktverlustes infolge einer Querkontraktion der Faser [LGS01]. Bei dem in Abbildung 3.6 dargestellten Aufbau des Faserausschiebeversuches erfahren sowohl die Matrix als auch die Faser dabei einen Druckspannungszustand. Tatsächlich wäre in der Umgebung eines aufgehenden Risses im Faserbeton eher eine Zugspannung in Faser und Matrix zu erwarten. Aufgrund dieser Unterschiede sowie weiterer Einflussfaktoren auf das Auszugverhalten kann die mithilfe von Auszugversuchen generierte Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung nicht als allgemeingültiges Materialgesetz verstanden werden [Rit14].

Viele bereits genannte Einflussfaktoren auf das Auszugverhalten von in UHPC eingebetteten Stahlfasern können anhand von Faserauszugversuchen evaluiert werden. Diese Informationen können Anhaltspunkte für die Bestimmung der direkten Einflussfaktoren auf das Verbundverhalten und den lokalen Verbundwiderstand geben, vgl. Abschnitt 3.4. Zusammenfassend gelten als maßgebliche Einflussfaktoren auf das Auszugverhalten

- die initiale Einbindelänge der Faser sowie der Faserdurchmesser, gegebenenfalls auch als Schlankheit der Faser,
- das Dehnungsvermögen der Faser, charakterisiert durch den Elastizitätsmodul und die Zugfestigkeit des Fasermaterials,
- duktile oder spröde Materialeigenschaften der Matrix
- durch geometrische Vorverformung oder geneigte Einbettung erzeugte zusätzliche Verbundmechanismen,
- die Verbundqualität und die Beschaffenheit der ITZ (Partikeldichte, Steifigkeit, Haftzugfestigkeit, Haftscherfestigkeit, Reibkoeffizient etc.), vgl. Kapitel 3.4,
- die Verbundnormalspannung und die Bedeutung der querdruckabhängigen Verbundmechanismen sowie
- die Belastungsgeschwindigkeit und die Messgenauigkeit bei instabiler Rissbildung.

Darüber hinaus ist die experimentelle Analyse von Materialeigenschaften auf der Mikroskala für Beton aufgrund seiner mikroskaligen Inhomogenität signifikanten Streuungen unterworfen. Insbesondere Einzelfaserauszugversuche liefern daher häufig innerhalb einer Charge Versuchskörper sehr unterschiedliche Traglasten. Herstellungsbedingte Abweichungen bei der Einbettung der Faser in die Matrix und eine ungleichmäßige Gefügestruktur infolge der Betonage führen zu weiteren Imperfektionen im Versuchsaufbau.

### 3.4 Charakterisierung der Verbundqualität

Mit der Bezeichnung Verbundqualität werden im Rahmen dieser Arbeit diejenigen Eigenschaften der Verbundzone zusammengefasst, die die querdruckunabhängige Verbundwirkung maßgeblich bestimmen. Je nach Mischungsentwurf für die Betonmatrix charakterisieren Gefügeeigenschaften wie die durch Abstimmung der Korngrößen erreichbare Partikelpackung, die Porosität und die Ausbildung eines Schichtsystems infolge von Anlagerungen von Wasser und Calciumhydroxidkristallen und Materialeigenschaften wie Elastizität und Festigkeit der Grenzschicht die Güte der Verbundwirkung. Aber auch die Wahl des Fasertyps und der Beschichtung sowie die mikroskopische Oberflächentopografie der Faser, die eine Mikroverzahnung innerhalb der Grenzschicht ermöglicht, spielen eine entscheidende Rolle im Bezug auf die Ausprägung der Verbundmechanismen im starren und verschieblichen Verbund, vgl. Kapitel 3.1. Im folgenden Kapitel werden die wesentlichen Einflüsse auf die Verbundqualität im Hinblick auf eine Optimierung der Verbundwirkung analysiert und zusammengefasst. Anhand dieser Einflussparameter erfolgen die Modellierung des Verbundverhaltens in Kapitel 4.2 und numerische Untersuchungen zur Verbundwirkung in den Kapiteln 6.2 und 6.3.

### 3.4.1 Einflüsse auf die initiale Verbundqualität

Für den starren Verbund zwischen UHPC und Stahl sind insbesondere die thermodynamische Adhäsionstheorie und die mikromechanische Verklammerung der verzahnten Oberflächen von Bedeutung. Nach JUHART können Effekte aus elektrostatischer Aufladung, Diffusion oder chemischen Hauptvalenzbindungen vernachlässigt werden [Juh11]. Darüber hinaus ist aufgrund der hohen Gefügedichte und des geringen Wasser-Zement-Wertes die Ausbildung von kapillaren Wasserbrücken in der Kontaktzone wahrscheinlich von untergeordneter Bedeutung [Juh11]. Maßgebend für die Verbundwirkung durch physikalische Adhäsion sind daher eher Festkörperbrücken in der Kontaktzone, die Adhäsionskräfte aus intermolekularen Wechselwirkungen elektrostatischer Natur oder als Säure-Base-Interaktion generieren [Juh11]. Die als Van-der-Waals-Kräfte zusammengefassten elektrostatischen Nebenvalenzbindungen werden im Rahmen von thermodynamischen Adhäsionstheorien in dispersive und polare Oberflächenkräfte unterteilt, wobei eine maximale Adhäsionsfestigkeit durch eine bei beiden Verbundpartnern gleich große Oberflächenenergie erreicht wird [Juh11]. Verantwortlich für die Bildung dieser Nebenvalenzbindungen sind nach JUHART einerseits die CSH-Phasen und andererseits die Metallionen und durch die alkalische Porenlösung veränderte Stahloberfläche [Juh11]. Als maßgeblicher Einflussfaktor für die Güte des adhäsiven Haftverbundes gilt dabei daher insbesondere der Abstand der Phasen voneinander, während die Partikelgröße in der ITZ eher zweitrangig ist [Juh11]. Durch die Zugabe von Wirkstoffen wie Latex kann die adhäsive Wirkung zwischen Stahl und Beton mit hohem Kostenaufwand verbessert werden [Naa00].

Mit dieser primären adhäsiven Haftung der Kontaktoberflächen aneinander werden bei entsprechender Oberflächentopografie der Faser in Verbindung mit den rheologischen Eigenschaften des frischen, noch nicht erhärteten Betons die Voraussetzungen für die Aktivierung der sekundären Mechanismen der mechanischen Verzahnung und der Haftreibung geschaffen. Bei einer entsprechenden Viskosität des frischen Betons kann mit optimalen Verdichtungsmaßnahmen und Temperatureinstellungen eine möglichst vollständige Benetzung der durch eine Mikro- und Makrorauheit geprägten Faseroberfläche erfolgen, die nach Erhärtung des Frischbetons eine mechanische Verklammerung der geometrisch verzahnten Oberflächen ermöglicht [Juh11], [Rei04]. Dabei spielt auch die Kohäsion der Betonmatrix und die möglichst fehlerstellenfreie Gefügedichte in der ITZ eine maßgebende Rolle für die Qualität dieser querdruckunabhängigen Verankerungswirkung [Juh11]. Imperfektionen durch schwind- oder lastinduzierte Mikrorisse oder bei durch Wandeckeffekte verschlechterten Partikelpackungen verringern die potenzielle Haftverbundfestigkeit [Juh11]. Eine manuelle Aufräufung der Faseroberfläche und eine Verwindung des profilierten Faserquerschnittes, wie beispielsweise bei Torex-Fasern, führen in experimentellen Untersuchungen zu signifikanten Verbesserungen der Mikroverzahnung im starren Verbund [Ste13], [Naa00]. Schließlich weist JUHART auch auf das Zusammenspiel von querdruckinduzierter Haftreibung und physikalischer Anziehung der Kontaktflächen hin, wobei proportional zur einwirkenden Verbundnormalspannung die Vergrößerung der mikroskopischen Kontaktfläche zusätzliche Anziehungskräfte zwischen den Phasen mobilisiert [Juh11]. Der Reibkoeffizient beschreibt dabei die Oberflächenunebenheiten und damit die potenzielle zusätzliche Kontaktfläche [Juh11].

Entsprechend den genannten Einflussfaktoren können die Verbundmechanismen im starren Verbund unterschiedlich stark ausgeprägt auftreten. Der maximale lokale Verbundwiderstand wird dann erreicht, kurz bevor der maßgebende Verbundmechanismus infolge einer Überschreitung der Haftscher- oder Haftzugfestigkeit versagt und die Ablösung der Kontaktflächen erfolgt.



### 3.4.2 Einflüsse auf den Verbundwiderstand bei Relativverschiebungen

Auch im verschieblichen Verbund gelten die Oberflächentopografie der Faser und die Gefügedichte der ITZ als maßgebende Einflussparameter auf den lokalen Verbundwiderstand, der sich wiederum aus den Verbundmechanismen Mikro-Interlocking und Gleitreibung zusammensetzt. Darüber hinaus bestimmt der geschädigte Zustand der Oberflächen von Matrix und Faser im Kontaktzonenriss die Kapazität der wirksamen Verbundmechanismen bei zunehmender Relativverschiebung zwischen den Rissufern. Im Allgemeinen führt Abrasion an den mikroskopisch profilierten Kontaktoberflächen zu einer Verringerung des verbleibenden Verbundwiderstandes, vgl. Kapitel 3.1. In der Literatur wird aber auch über einen signifikanten Einfluss durch Mikro-Interlocking berichtet, der zu einer lokalen Vergrößerung des Verbundwiderstandes führen könnte [WN12], vgl. Abbildung 3.13. Maßgeblicher Einflussfaktor könnte demnach die initiale Verbundqualität sein. In der folgenden Abbildung 3.14 sind beispielhaft schematische Entwicklungsverläufe der übertragbaren Verbundspannung je nach Verbundqualität infolge Degradation oder Verfestigung durch Mikro-Interlocking über die Schädigung der Verbundzone, die hier nicht im Sinne der Kontinuumschädigungsmechanik definiert ist, dargestellt, vgl. Kapitel 4.2.

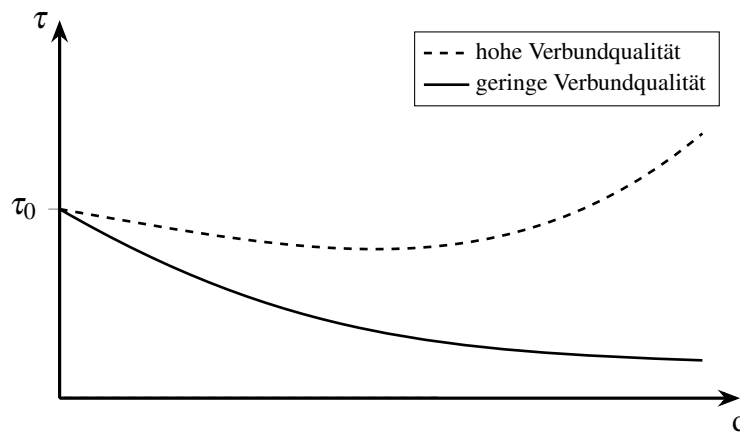


Abbildung 3.14: Schematische Entwicklung des Verbundwiderstandes in Abhängigkeit der Verbundzonenschädigung und der Verbundqualität

Die Entwicklung der übertragbaren Verbundspannung ist abhängig vom lokalen Zustand der Verbundzone, d. h. direkt nach der Ablösung der Kontaktflächen hat eine Relativverschiebung auf die unebenen, frischen Rissufer des Kontaktzonenrisses einen großen Einfluss, der sich jedoch bei zunehmender Relativverschiebung kontinuierlich abschwächt, vgl. Abbildung 3.14. So erfährt beispielsweise eine Verbundzone mit ausgeprägter Mikroverzahnung zwar nach Ablösung der Kontaktflächen zunächst ein hohes Maß an Schädigung durch das Abscheren der ineinandergreifenden Profilierung, weist aber durch die Vielzahl an gelösten Partikeln in der Verbundzone sowie durch eine von ungleichmäßigen Bruchstellen geprägte Unebenheit der Oberflächen ein vergrößertes Potenzial für wirksames Mikro-Interlocking auf. Zusätzlich kann durch auftretende Dilatanz in der Verbundzone die Kontaktpressung und damit die potenzielle Gleitreibung vergrößert werden. Das Degradationspotenzial ist insgesamt vergleichsweise hoch, da große Mengen an Partikeln in der Kontaktzone bewegt und fein gemahlen werden, kann aber durch Verkeilungen verzögert werden und sich positiv auf das Verbundverhalten auswirken, vgl. Abbildung 3.14. Insbesondere das optimale Verhältnis unterschiedlicher Partikelgrößen spielt hier eine Rolle. Der schematisch ansteigende Verlauf in Abbildung 3.14 für eine hohe Verbundqualität spiegelt die Wahrscheinlichkeit wider, dass es zum Verkeilen von Partikeln

und Körnern in der Verbundzone und damit zu einem lokal vergrößerten Verbundwiderstand kommt. Auch ein mehrstufiger Anstieg mit Plateaus oder zwischenzeitlicher Verringerung des Verbundwiderstandes, wie in Abbildung 3.2 dargestellt, ist hier denkbar.

Dagegen sind die Interaktionen wenig verzahnter Kontaktoberflächen nach ihrer Ablösung voneinander nur in geringem Maße wirksam. Eine niedrige Verbundqualität kann auch durch Fehlstellen und Hohlräume infolge von Porosität oder Mikrorissbildung in Rissprozesszonen auftreten und bei einsetzender Degradation schon bei kleinen Relativverschiebungen zu einem sehr geringen verbleibenden Verbundwiderstand führen. Die schematische Darstellung in Abbildung 3.14 veranschaulicht beispielhaft die Entwicklung der übertragbaren Verbundspannung bei niedriger Verbundqualität. Im folgenden Kapitel wird auf die Degradation bei zyklischer Belastung und ihre Bedeutung für die Materialermüdung von UHPFRC hingewiesen, vgl. Kapitel 2.2.

### 3.5 Ermüdungsverhalten der Verbundzone

Das Materialverhalten von UHPFRC unter Ermüdungsbeanspruchung ist insbesondere in der dritten Phase des Ermüdungsverhaltens, i. e. das instabile Risswachstum, durch die Ermüdung des Verbundes zwischen Fasern und Matrix bestimmt, vgl. Kapitel 2.2. So hängt die Resttragfähigkeit des Werkstoffes nach Rissbildung entscheidend von der Ermüdungsfestigkeit des Verbundes ab und mit Beginn des Faserausuges im Makroriss wird das Ermüdungsversagen des UHPFRC-Querschnittes eingeleitet.

Das Ermüdungsverhalten der Verbundzone kann experimentell mithilfe von Auszugversuchen wie in Abbildung 3.6 unter zyklischer Zugbeanspruchung erfasst werden. Während umfangreiche experimentelle Untersuchungen zur Ermüdung des Verbundes zwischen Beton und geripptem Betonstahl, vgl. [EY78], [RE79], [EPB83], eine mikrophysikalisch begründete Modellierung des Verbundverhaltens zwischen Bewehrung und Matrix im konventionellen Stahlbeton durch COX & HERRMANN ermöglicht haben, vgl. [HC94], sind bislang nur wenige Untersuchungen zur Ermüdung des Verbundes zwischen Stahlfasern und ultrahochfestem Beton bekannt. Detaillierte Untersuchungen an geripptem Betonstahl insbesondere von LINDORF erlauben die phänomenologische Beschreibung des Ermüdungsverhaltens des Faser-Matrix-Verbundes, vgl. [Lin11].

Nach LINDORF ist die Ermüdung des Verbundes zwischen Stahl und Beton durch eine Schlupfzunahme gekennzeichnet, welche experimentell erfasst werden kann [Lin11]. Die Ermüdung stellt dabei als Schwächung der Verbundzone eine Degradation der Verbundkapazität dar, die in einem Zusammenhang mit der Relativverschiebung zwischen den Kontaktflächen steht, vgl. Abbildung 3.14. Da infolge der Hydratation in der Regel schon vor Belastung des Verbundwerkstoffes Defekte und Fehlstellen in der Verbundzone auftreten, sind auf der Grundlage experimenteller Untersuchungen keine abgesicherten Aussagen über das Ermüdungsverhalten der starr verbundenen Kontaktflächen im Initialzustand möglich. Denkbar ist eine Abnahme der Verbundsteifigkeit etwa durch Gefügelockerungen und viskose Verformungen der Verbundzone, in der die Kontaktflächen starr aneinanderhaften durch die Verbundmechanismen Adhäsion, Mikroverzahnung und Haftreibung, vgl. Kapitel 3.1. Eine derartige Ermüdungsschädigung kann jedoch im Vergleich zu Schädigungseffekten bei verschieblichem Verbund, in dem Gleitreibung und Mikro-Interlocking die maßgebenden Verbundmechanismen sind, nur von untergeordneter Bedeutung sein. Für die folgenden Überlegungen wird daher angenommen, dass die Ermüdungsschädigung der

Verbundzone nur infolge von Relativverschiebungen, d. h. bei zumindest teilweise abgelösten Kontaktflächen, zunimmt.

Ausgehend von einem ungeschädigten Initialzustand der Verbundzone um eine in UHPC eingebettete Stahlfaser endlicher Länge findet bei erstmaliger Belastung in einem Faserauszugversuch in Abhängigkeit der Verbundfestigkeit eine partielle Ablösung am Faseraustrittsort entsprechend Phase II des Auszugverhaltens statt, vgl. Abschnitt 3.3. Dadurch wird in diesen Bereich eine Relativverschiebung zwischen den Kontaktflächen, generiert, während am starr eingebundenen Faserende kein Schlupf auftritt. Die Schlupfdifferenz zwischen diesen beiden Stellen ist direkt mit der Verteilung der Verbundspannung verknüpft, vgl. Abbildung 3.11. Die Entlastung des Faser-Matrix-Verbundes führt zu einer elastischen Rückdehnung der Faser und des Betons, sodass der Schlupf am Faseraustrittsort zumindest teilweise zurückgeht. Die Relativverschiebung im abgelösten Bereich ist dabei entgegengesetzt gerichtet, kann aber bei entsprechender Ausprägung ebenso eine Degradation der Verbundkapazität bewirken. Bei einer erneuten Belastung ist aufgrund dieser verschiebungsinduzierten Degradation die weitere Ablösung der noch starr verbundenen Bereiche erforderlich, um ein Gleichgewicht zwischen der einwirkenden Kraft und der durch Verbundspannungen abgetragenen Kraft zu erreichen, da auch die erneute Relativverschiebung in Auszugrichtung eine Degradation der Verbundfestigkeit im Bereich des Faseraustrittsortes bewirkt. Mit jeder weiteren Be- und Entlastung verringert sich die Verbundkapazität im verschieblichen Teil der Verbundzone und das Debonding schreitet entsprechend der zunehmenden Faseraktivierung weiter fort. Da die Verbundfestigkeit im verschieblichen Verbund trotz allmählicher Degradation näherungsweise über die Verbundlänge gleich groß ist, erfolgt eine Vergleichmäßigung der Verbundspannungen allein durch die Spannungsumlagerung beim Debonding. Derartige Spannungsumlagerungen bei Ermüdung sind auch in den von LINDORF ausgewerteten experimentellen Untersuchungen von PERRY & JUNDI und REHM & ELIGEHAUSEN an Ermüdungsversuchen mit geripptem Bewehrungsstahl beobachtet worden [Lin11]. Auch viskose Verformungen des Betons wie etwa Kriechverformungen bei lange andauernden Ermüdungsbeanspruchungen könnten zur Spannungsumlagerung entlang der Verbundlänge beitragen, vgl. [One14], [Lin11]. Nicht berücksichtigt ist in diesen Überlegungen bisher, dass auch die Stahlfaser ein durch Ermüdung und Relaxation verändertes Spannungs-Deformations-Verhalten aufweist und damit einen direkten Einfluss auf die Entwicklung der Schlupfdifferenz in der Verbundzone hat.

LINDORF stellt bei der Auswertung verschiedener Verbundversuche unter zyklischer Beanspruchung keine Zunahme der Schlupfdifferenz infolge der Ermüdung fest [Lin11]. Die hier genannten Ermüdungsvorgänge in Phase II des Auszugverhaltens führen bei langsam fortschreitendem Debonding und allmählicher Spannungsumlagerung ebenfalls nicht zu einer signifikanten Vergrößerung der Schlupfdifferenz. Sobald eine weitere Ablösung der Kontaktflächen voneinander in Verbindung mit der Degradation der Verbundfestigkeit im verschieblichen Verbundbereich die Aufnahme der eingeleiteten Kraft nicht mehr ermöglicht, setzt das Ermüdungsversagen ein. Damit geht die vollständige Kontaktzonenrissbildung und ein progressives Schlupfwachstum beim Faserauszug einher. Durch die bereits fortgeschrittene Degradation der Verbundzone im verschieblichen Bereich ist eine erhöhte Anzahl gelockerter, gelöster oder fein gemahlener Partikel im Faserkanal, die im Rahmen von Mikro-Interlocking eine lokale Vergrößerung des Verbundwiderstandes darstellen. Das Ermüdungsversagen durch Faserauszug kann dadurch möglicherweise verlangsamt, aber nicht verhindert werden. Die Bedeutung der Ermüdungsfestigkeit der Stahlfaser ist nach aktuellem Forschungsstand nicht eindeutig geklärt, wird aber im Vergleich mit der fortschreitenden Ablösung der Kontaktflächen als maßgeblicher Antreiber der Verbun-

dermüdung als eher gering eingeschätzt, vgl. [Sch75a], [Thi16]. Die folgende Abbildung 3.15 zeigt schematisch das Ermüdungsverhalten der Verbundzone zwischen glatten Stahlfasern und ultrahochfestem Beton. Numerische Untersuchungen zum Ermüdungsverhalten der Verbundzone werden in Kapitel 6.3 vorgestellt.

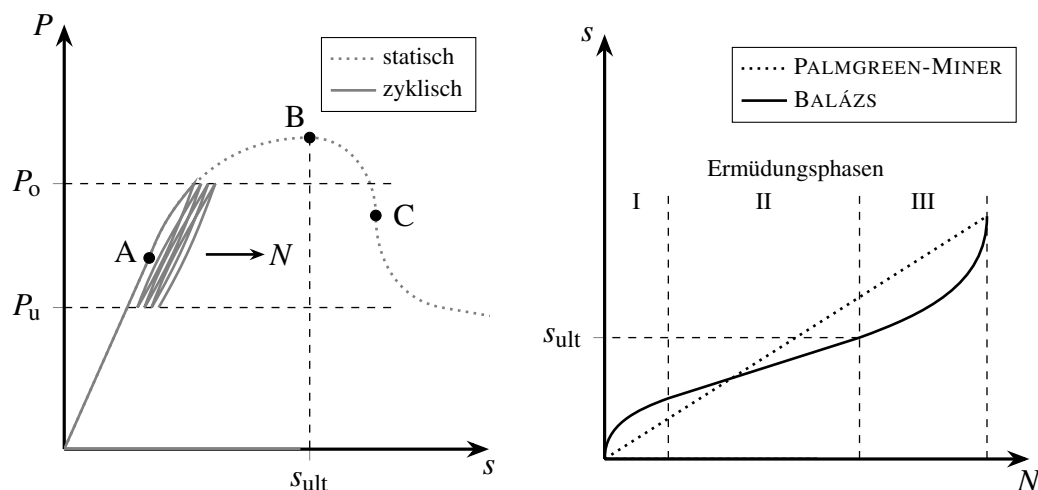


Abbildung 3.15: Schematische Darstellung zur Verbundermüdung zwischen glatten Stahlfasern und UHPC nach [Lin11]

Die Ermüdung des Verbundes verläuft analog zur Betonermüdung in drei charakteristischen Phasen, welche in Abbildung 3.15 anhand der Entwicklung des Schlupfes  $s$  über die Lastwechselzahl  $N$  dargestellt sind [Lin11]. Außerdem ist der Verlauf des Auszugwiderstandes  $P$  über den Schlupf für eine statische und eine zyklische Beanspruchung zwischen den Belastungsgrenzen  $P_0$  und  $P_u$  schematisch dargestellt, vgl. Abbildung 3.9. Nach BALÁZS stimmt der gemessene Schlupf beim Übergang in die progressive Ermüdungsphase III näherungsweise mit dem Schlupf  $s_{ult}$  bei Erreichen des maximalen Auszugwiderstandes überein [Lin11], vgl. Abbildung 3.15. Damit wäre die Hypothese gerechtfertigt, dass der maßgebende Teil der Ermüdungsmechanismen in Phase II des Auszugverhaltens, d. h. bei nur teilweise abgelösten Kontaktflächen, auftritt.

In Einzelfaserauszugversuchen unter zyklischer Beanspruchung wird ein progressives Versagen der Verbundzone beobachtet, sobald der gemessene Schlupf zwischen Faser und Matrix eine Größenordnung erreicht, nach der die zyklische Beanspruchung entsprechend dem Kraft-Weg-Arbeitslinie unter statischer Belastung nicht mehr aufgenommen werden kann, vgl. z. B. [LOE<sup>+</sup>19], [HKD<sup>+</sup>19]. Unter Berücksichtigung des Extremwertes der wiederholten Be- und Entlastung stimmt diese Beobachtung mit der These von BALÁZS überein. Im Hinblick auf die Ermüdungsfestigkeit der Verbundzone muss der Schlupf  $s_{ult}$  als Grenzwert herangezogen werden, da ab Punkt B keine Laststeigerung mehr möglich ist, vgl. Abbildung 3.15.

Darüber hinaus ist in Abhängigkeit der Faserverteilung auch das gleichzeitige Auftreten von vollständig verschieblichen Fasern in der Faserauszugphase III in ermüdungsbeanspruchten Verbundwerkstoff wahrscheinlich. Bei wiederholter Be- und Entlastung entstehen zwischen der abgelösten Faser und dem Faserkanal Relativverschiebungen, die eine Abrasion und Vermahlung von Bestandteilen der Betonoberfläche bewirken. In Abhängigkeit von Querdruck und zufällig angestauten Partikeln kann es zu einer ungleichmäßig verteilten Verbundspannung entlang der Verbundlänge kommen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeit für eine lokale Vergrößerung des

Verbundwiderstandes in Richtung des eingebetteten Faserendes am größten. Die fortgeschrittene Degradation der Verbundzone verschieblicher Fasern bedeutet, dass keine effektive Mitwirkung dieser Fasern beim Lastabtrag zu erwarten ist.

Bei der Übertragung des lokalen Ermüdungsverhaltens einer eingebetteten Faser auf den Verbundwerkstoff sind mehrere Unterschiede zu beachten, vgl. Kapitel 6. Spannungsumlagerungen innerhalb des Verbundwerkstoffes infolge der Ermüdung können zu veränderten Spannungszuständen der rissüberbrückenden Fasern in jedem Belastungszyklus führen. Die Annahme einer immer gleichen Beanspruchung ist demnach als eine Vereinfachung zu sehen, die Aufschluss über das allgemeine Ermüdungsverhalten geben kann. Maßgebende Einflussfaktoren auf das lokale Ermüdungsverhalten sind vor allem Vorschädigungen sowie der Spannungs-Deformations-Zustand etwa infolge von Zwängungen. Weiterhin spielen die Beanspruchungsdauer und das -niveau eine bedeutende Rolle im Hinblick auf das zeitabhängige Verhalten des Betons. Außerdem hängt das Ermüdungsverhalten im Verbundbereich mit dem Verbundverhalten unter statischer Beanspruchung zusammen, d. h. die Einflussfaktoren auf die Verbundfestigkeit und das Verbund- und Degradationsverhalten bei kontinuierlichem Faserauszug in Kapitel 3.4 sind weiterhin von Bedeutung.

## 4 Materialmodell für den Verbund

Ziel dieser Arbeit ist die numerische Analyse der Tragwirkung rissüberbrückender Mikrofasern in ultrahochfestem Beton. Für mesoskalige Untersuchungen des Faserauszugverhaltens wird ein kontinuumsmechanisches Materialmodell entwickelt, das die lokale Verbundwirkung zwischen einer glatten Faseroberfläche und einer feinkörnigen UHPC-Matrix allgemeingültig beschreibt und für die Anwendung in numerischen Untersuchungen mithilfe von Verbundzonenelementen optimiert ist. Dabei wird das phänomenologische Verbundverhalten mechanismenorientiert erfasst und unter Berücksichtigung der maßgebenden Einflüsse wiedergegeben, vgl. Kapitel 3.

Im folgenden Kapitel werden basierend auf analytischen und numerischen Modellierungsansätzen aus der Literatur die Materialgleichungen des entwickelten Modells und ihre Diskretisierung in der Zeit vorgestellt. Anschließend werden einige wesentliche Aspekte des Verbundverhaltens im Hinblick auf die Wahl der Modellparameter sowie die Modifikation von Entwicklungsgleichungen diskutiert. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die Diskretisierung des Materialmodells mithilfe von speziell für große Relativverschiebungen weiterentwickelten Interface-Elementen für dreidimensionale FEM-Simulationen dargelegt und verifiziert, vgl. Kapitel 5. Die Kalibrierung und Validierung des Verbundmodells erfolgt anhand von numerischen Untersuchungen zum Faserauszugproblem in Kapitel 6.2.

### 4.1 Grundlagen der Modellierung

Mit der Entwicklung von Faserverbundwerkstoffen beginnt in der Mitte des 20. Jahrhunderts die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit der Kraftübertragung zwischen Faser und Matrix. Während die Beschreibung der gemeinsamen Tragwirkung vereinfacht mit verschmierten Materialeigenschaften des inhomogenen Werkstoffes erfolgen kann, ist für das detaillierte Verständnis des Materialverhaltens die separate Betrachtung der Einzelkomponenten und die Beschreibung des Verbundverhaltens von Bedeutung, vgl. Kapitel 2.3.

Im folgenden Kapitel werden vorhandene Beschreibungsansätze für die Kraftübertragung zwischen Faser und Matrix zusammengefasst. Darüber hinaus wird ein Überblick über den aktuellen Stand der Forschung zur Modellierung der Verbundwirkung zwischen Stahl und Beton gegeben, der als Grundlage für die Entwicklung des Verbundmodells im Rahmen dieser Arbeit dient, vgl. Kapitel 4.2.

#### 4.1.1 Grundgleichungen zur Modellierung des Faser-Matrix-Verbundes

In Analogie zu Kapitel 3.2 können für Faser und Matrix im Faser-Matrix-Verbund kinematische Beziehungen, Gleichgewichtsbedingungen und Werkstoffgleichungen im Rahmen der Elastizitätstheorie angegeben werden, vgl. z. B. [McC89]. Dabei ist für die Beschreibung des Spannungs-Deformations-Verhaltens der Matrix keine Vereinfachung des Randwertproblems als ebener Formänderungszustand mit eben bleibenden Querschnitten zulässig. In Ergänzung zu den Gleichungen (3.1) mit der Definition der Verzerrungshaupttrichtungen  $\epsilon_{rr}$ ,  $\epsilon_{\theta\theta}$  und  $\epsilon_{zz}$  lauten die kinematischen Beziehungen für das rotationssymmetrische Spannungs-Deformations-Verhalten

in Zylinderkoordinaten

$$\varepsilon_{r\theta} = 0, \quad \varepsilon_{\theta z} = 0, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (4.1)$$

vgl. Abbildung 3.3. In Analogie zu den elastischen Werkstoffgleichungen (3.2) gilt

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{rz} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

und die gegenüber Gleichung (3.3) erweiterten Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (4.3)$$

[McC89], [TG87]. Als Randbedingungen des starren Faser-Matrix-Verbundes müssen die Verschiebungen  $u$  und  $w$ , daraus folgend auch die Dehnungen parallel zur Faserachse sowie die Spannungen  $\sigma_{rr}$  und  $\tau_{rz}$  an der Kontaktfläche identisch sein, vgl. [MS69b]. Bei starrem Verbund zwischen Faser und Matrix ist eine maximale Kraftübertragung zwischen den Komponenten möglich. Infolge einer Beanspruchung wird eine Verbundreaktion als Kombination von Haftscher-spannungen parallel zur Verbundebene und Haftzugspannungen senkrecht zur Verbundebene generiert [Juh11].

Bei Überschreitung der initialen Verbundfestigkeit werden in der Verbundzone Relativverschiebungen zwischen den Oberflächen der gekoppelten Strukturen generiert. Die kinematische Beziehung für die Relativverschiebung  $\delta_{b,z}$  parallel zur Faserachse lautet in der Notation des Faserauszugsproblems nach Abbildung 3.4

$$\frac{d\delta_{b,z}}{dz} = \frac{dw_f}{dz} - \frac{dw_m}{dz} = \varepsilon_{zz,f} - \varepsilon_{zz,m} \quad (4.4)$$

und beschreibt die Änderung des Schlupfes infolge der Dehnungsdifferenz zwischen Faser und Matrix, wobei die Vorzeichendefinition der dreidimensionalen Relativverschiebung  $\delta$  in der Literatur nicht einheitlich ist. Die Differenziation der Gleichung (4.4) ergibt unter Berücksichtigung des linear-elastischen Werkstoffgesetzes, des Kräftegleichgewichtes zwischen Faser und Matrix mit  $dF_{zz,f}/dz = dF_{zz,m}/dz$  und der Kraftübertragung zwischen Verbundzone und Faser nach Gleichung (2.4) die Differenzialgleichung des verschieblichen Verbundes

$$\frac{d^2 \delta_{b,z}}{dz^2} = \frac{\tau_{b,z} \cdot U_f}{E_f \cdot A_f} \cdot \left( 1 + \frac{E_f \cdot A_f}{E_m \cdot A_m} \right), \quad (4.5)$$

wobei die Verbundspannung  $\tau_{b,z} = \tau_f$  abhängig von der Relativverschiebung  $\delta_{b,z}$  ist, vgl. z. B. [Reh61], [fib00]. Die Vernachlässigung der geringen Betondehnungen führt auf die vereinfachende Form der Differenzialgleichung des verschieblichen Verbundes

$$\frac{d^2 \delta_{b,z}}{dz^2} = \frac{\tau_{b,z} \cdot U_f}{E_f \cdot A_f} = \frac{\tau_{b,z} \cdot 2}{E_f \cdot r_f}, \quad (4.6)$$

vgl. [Let06], [Reh61].

### 4.1.2 Analytische Beschreibung des Faserauszugproblems

Die analytische Beschreibung und Lösung des komplexen Randwertproblems der Kraftübertragung zwischen einer teilweise in einer Matrix eingebetteten, axial belasteten Faser und der Matrixumgebung, im Rahmen dieser Arbeit als Faserauszugproblem bezeichnet, ist für das Verständnis von Faserverbundwerkstoffen aus verschiedenen Materialien in vielen Anwendungsbereichen von Interesse und insbesondere in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts Gegenstand einiger Forschungsvorhaben gewesen. Während die kontinuumsmechanische Beschreibung der Kraftübertragung im starren Faser-Matrix-Verbund MUKI & STERNBERG nur für eine unendlich lange Verbundlänge in Analogie zu MELANS zweidimensionaler Beschreibung auf Basis der Elastizitätstheorie erfolgen kann, vgl. [MS69b], [Mel32], gelingt mithilfe unterschiedlicher analytischer Modellansätze eine näherungsweise Beschreibung des Faserauszugproblems in Analogie zu REISSNERS zweidimensionaler Problemstellung, vgl. [Rei40]. Im Folgenden werden einige ausgewählte Ansätze vorgestellt.

In Analogie zu MELANS Formulierung des Problems ermitteln MUKI & STERNBERG zunächst im Rahmen der Elastostatik mit der Annahme homogen verteilter, isotroper Materialeigenschaften eine exakte Beschreibung der Kraftübertragung für einen unendlich langen, elastischen Stab mit Kreisquerschnitt und axialer Zugbeanspruchung in einer unendlich ausgedehnten elastischen Matrix [MS69b]. Darauf aufbauend entwickeln sie eine für beliebige Querschnittsformen verallgemeinerte Näherungslösung, die in der folgenden Abbildung 4.1 im Vergleich zur exakten Lösung dargestellt ist [MS69b]. Darin wird der Faser-Matrix-Verbund als eine um ein fiktives elastisches Kontinuum erweiterte Matrix idealisiert, das in Richtung der ursprünglichen Stabachse eine versteifende, eindimensionale Wirkung hat und die exakte Modellierung des eingebetteten Stabes mit beliebiger Querschnittsform ersetzt [MS69b], [MS70]. Der charakteristische asymptotische Verlauf der Zugkraftübertragung wird auch von der Näherungslösung adäquat abgebildet [MS69b].

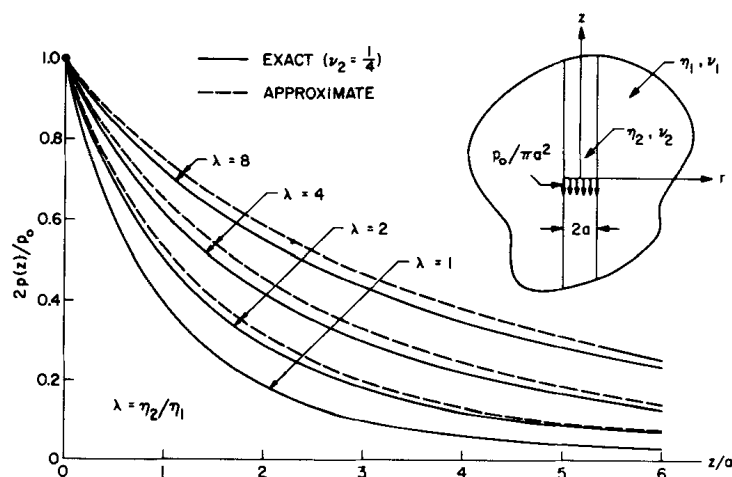


Abbildung 4.1: Analytisch exakte und Näherungslösung zur Kraftübertragung im unendlich ausgedehnten Faser-Matrix-Verbund von MUKI & STERNBERG aus [MS69a]

MCCARTNEY stellt 1989 ein mikromechanisches Modell zur Analyse der Kraftübertragung zwischen einer axial belasteten Faser und der Matrixumgebung vor, welches auf der Modellvorstellung eines dickwandigen Matrixzylinders mit eingebettetem Faserzylinder, vgl. Grundgleichung (4.1) und (4.3), mit einem idealen, starren Verbund oder einem verschieblichen Reibverbund



basiert und im Rahmen der Elastizitätstheorie, vgl. Grundgleichung (4.2) für eine näherungsweise Beschreibung der Spannungsverläufe in Faser, Matrix und Kontaktzone ausgewertet wird [McC89]. Dabei werden drei Varianten des rotationssymmetrischen Spannungs-Deformations-Zustandes betrachtet. Zunächst wird mit idealem starrem Verbund sowohl die Kraftübertragung bei einem Matrixriss als auch bei einem Faserbruch beschrieben [McC89]. Darauf aufbauend erfolgt zudem eine Spannungsanalyse für eine vom Matrixriss ausgehende Ablösung der Kontaktflächen in der Verbundzone, sodass über die Verbundlänge zum Teil idealer starrer Verbund und zum Teil verschieblicher Reibverbund vorherrscht [McC89]. Der Faser-Matrix-Verbund wird dabei als unendlich lang in Richtung der Faserachse ausgedehnt angenommen, wobei außerhalb des durch den Matrix- respektive Faserriss gestörten Bereiches ein idealer starrer Verbund und somit ein entsprechend den Steifigkeiten verteilter gemeinsamer Lastabtrag erfolgt [McC89], vgl. Gleichung (2.2). Damit weichen die Randbedingungen dieses Modells von den erforderlichen geometrischen Randbedingungen des Faserauszugsproblems mit endlich lang eingebetteter Faser ab, sodass eine Verifizierung des eigenen Verbundmodells mit diesem analytischen Modellansatz nicht möglich ist.

In einer weiteren Veröffentlichung analysieren MUKI & STERNBERG die Kraftübertragung in einer dreidimensionalen Faserauszugsconfiguration in Analogie zu REISSNERS zweidimensionaler Formulierung mit einem endlich lang eingebetteten Stab in einer als elastischer Halbraum idealisierten Matrix. Sie stellen dazu eine verallgemeinerte Problemstellung für beliebige Stabquerschnittsformen und die Reduzierung der Bestimmungsgleichung für die Stabkraft auf die Lösung eines FREDHOLM-Integrals der zweiten Art vor, die in Analogie zur Näherungslösung für den unendlich langen Verbund, vgl. Abbildung 4.1, steht [MS69b], [MS70]. Darüber hinaus geben sie für die auf zylindrische Stabgeometrien spezialisierte Bestimmungsgleichung für die Stabkraft numerische Lösungen in Abhängigkeit variierter Parameter bezüglich der Stabschlankheit, des Steifigkeitsverhältnisses und der Querdehnzahl des elastischen Mediums an [MS70]. Die folgende Abbildung 4.2 zeigt die von MUKI & STERNBERG ermittelte analytische Lösung für einen teilweise eingebetteten Stab mit der Schlankheit  $\ell/r = 10$  beziehungsweise  $\ell/r = 20$  und einer Querdehnzahl des elastischen Halbraums von  $\nu = 0,25$ , welche mit einem Steifigkeitsverhältnis von  $\delta = 4$  der üblichen Konfiguration eines Faserauszuges aus Beton nahe kommt. Eine Querdehnung des Stabes ist dabei nicht vorgesehen.

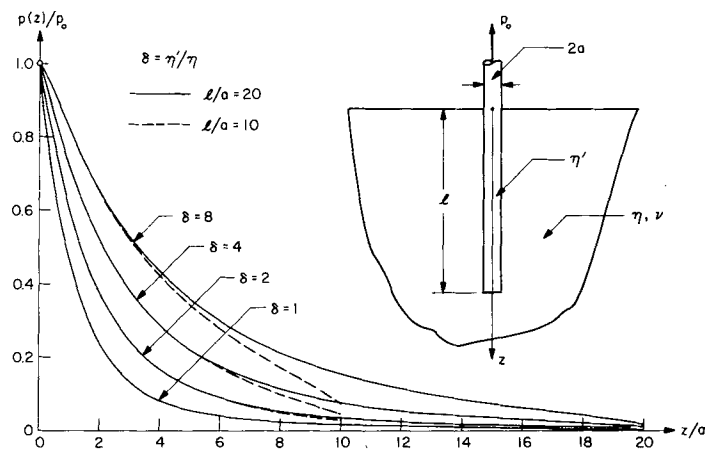


Abbildung 4.2: Analytische Näherungslösung der axialen Zugkraft in der Faser für das dreidimensionale Faserauszugsproblem von MUKI & STERNBERG aus [MS70]

Varianten mit als starr modellierten, eingebetteten Stäben sind der Literatur zu entnehmen, vgl. z. B. [LK79], [SR85]. Eine Weiterentwicklung des Ansatzes von MUKI & STERNBERG zur Auswertung von achsensymmetrischen Belastungen des eingebetteten Stabes erfolgt durch PAK & GOBERT [PG93].

Eine verbesserte Näherungslösung zur Kraftübertragung im Faser-Matrix-Verbund liefern im Jahr 1991 SLAUGHTER & SANDERS [SS91], vgl. Abbildung 4.3. Sie beschreiben das elastische Spannungs-Deformations-Verhalten des Stabes mithilfe der einaxialen Stabtheorie ohne Schubverformungen und nähern die Dehnungen der Matrix in Richtung der Stabachse im diskontinuierlichen Bereich der Lasteinleitung an [SS91]. Im Vergleich zur Näherungslösung von MUKI & STERNBERG werden Querdehnungen der Faser und tangential Verbundspannungen in der Kontaktzone explizit berücksichtigt [SS91]. Als Schwäche des Modells wird die Bestimmung von Normalspannungen in der Kontaktzone im Diskontinuitätsbereich festgestellt [SS91], wobei tangential Kontaktspannungen und die Zugspannung in der Faser im Vergleich mit der exakten Lösung des unendlich ausgedehnten Faser-Matrix-Verbundes und mit den Näherungslösungen von MUKI & STERNBERG passend beschrieben werden [SS91].

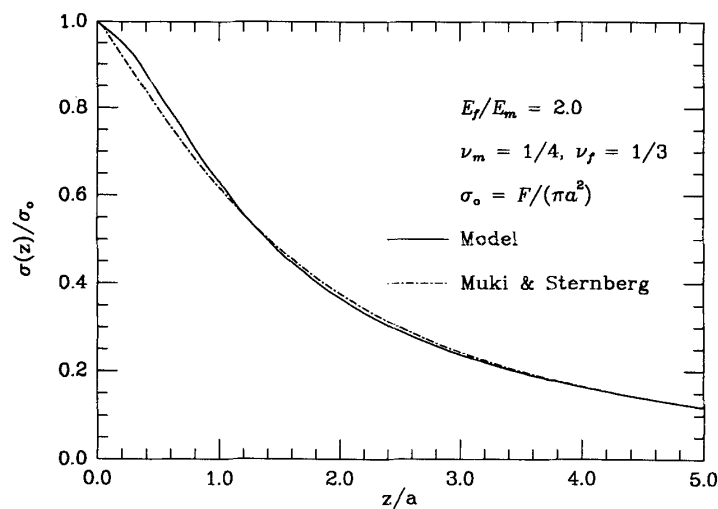


Abbildung 4.3: Analytische Näherungslösung der axialen Zugspannung in der Faser für das Faserauszugproblem von SLAUGHTER & SANDERS aus [SS91]

Durch die explizite Beschreibung der tangentialen Kontaktspannung zwischen Faser und Matrix eignet sich die von SLAUGHTER & SANDERS vorgeschlagene Näherungslösung ihrer Meinung nach besonders für die Validierung von einfachen Modellen der Kraftübertragung im Verbund auf Basis des „Shear-Lag“-Konzeptes [SS91]. Darin wird die räumliche Verbundwirkung innerhalb der Matrix häufig auf eine ebene Verbundwirkung zwischen den Kontaktflächen reduziert und auf die Mantelfläche der Faser bezogen [Alv98]. Aufgrund der mathematischen Komplexität der Modellfunktionen wird im Bezug auf die genannten Approximationen im Rahmen dieser Arbeit auf eine programmiertechnische Umsetzung der Modelle verzichtet, sodass nur eine qualitative Verifizierung des entwickelten Verbundmodells mit den in den Abbildungen 4.2 und 4.3 dargestellten analytischen Näherungslösungen für das Faserauszugproblem erfolgen kann, vgl. Kapitel 5.2.

### 4.1.3 „Shear-Lag“-Konzept

Mithilfe einer vereinfachenden Gleichgewichtsbetrachtung an einem infinitesimalen Ringstück aus dem Eisen-Beton-Verbund ermitteln HOYER & FRIEDRICH im Jahr 1939 einen hyperbolischen Verlauf der Verbundspannungen über den Radius der Matrix [HF39]. Während dieser Berechnungsansatz für starren Verbund ohne die Definition und Berücksichtigung von Relativverschiebungen auskommt, wird im sogenannten „Shear-Lag“-Konzept auf Basis der Untersuchungen von VOLKERSEN an Niet-, Leim- und Bolzenverbindungen und von COX an faserhaltigen Werkstoffen am Beispiel von Papier eine elastische Relativverschiebung zwischen Faser und Matrix in Form von Schubverformungen einer Verbundzone mit endlicher Dicke definiert [Vol38], [Cox52].

Grundlegende Annahmen für diesen elastischen Scherverbund sind das linear-elastische Spannungs-Deformations-Verhalten aller beteiligten Komponenten, das Ebenbleiben der Querschnitte entsprechend der BERNOULLI-Hypothese, das Vorherrschen kleiner Verformungen, die Homogenität der Grenzschicht und die Vernachlässigung der Biegesteifigkeit der Verbundzone und der Faser, vgl. [Wir04], [Vol38], [Cox52]. Demnach trägt die Faser ausschließlich Zugkräfte in Richtung ihrer Längsachse ab, die mithilfe von Schubspannungen in der Verbundzone in die umgebende Matrix übertragen werden [Vol38], [Cox52].

Für die Beschreibung und Modellierung des Lastabtrages einer axial belasteten, teilweise in einer Matrix eingebetteten Faser wurden in den 1970er- und 1980er-Jahren verschiedene theoretische Ansätze auf Basis des „Shear-Lag“-Konzeptes entwickelt, die sich vor allem hinsichtlich der Definition von Geometrie und Randbedingungen der Matrix und der Verbundzone sowie bezüglich der getroffenen vereinfachenden Annahmen unterscheiden. Dabei werden die Ergebnisse der „Shear-Lag“-Analyse zur Kraftübertragung zwischen Faser und Matrix auch weitergehend für die Beschreibung des Debondings und der Bildung von Kontaktzonenrissen und für die Modellierung der rissüberbrückenden Faserwirkung verwendet, vgl. z. B. [Gre69], [Pig70], [Law72], [LLN73], [Law82], [ACK71], [AK73], [TA73], [BHE86], [Hsu88]. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über die Grundlagen sowie Vor- und Nachteile des „Shear-Lag“-Konzeptes gegeben.

COX leitet zur Beschreibung der Kraftübertragung im starren Faser-Matrix-Verbund eine Differenzialgleichung her, hier in die Notation dieser Arbeit überführt,

$$\frac{d^2 P}{dz^2} = H \cdot \left( \frac{P}{E_f \cdot A_f} - e \right), \quad (4.7)$$

worin  $P$  die Kraft in der Faser und  $H$  und  $e$  jeweils Konstanten sind [Cox52]. Für die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung mit den zu bestimmenden Konstanten  $R$  und  $S$

$$P(z) = E_f \cdot A_f \cdot e + R \cdot \sinh(\beta z) + S \cdot \cosh(\beta z) \quad (4.8)$$

definiert er den „Shear-Lag“-Parameter  $\beta$  mit

$$H = \frac{2\pi G_m}{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}, \quad (4.9)$$

wobei  $r_0 = r_f$  der Radius der kreisrunden Faser ist und  $r_1$  den mittleren Achsabstand der parallel

eingebetteten Fasern meint, zu

$$\beta = \sqrt{\frac{H}{E_f \cdot A_f}} \quad (4.10)$$

[Cox52].

In dieser Formulierung erfährt die Verbundzone, die hier nicht von der Matrix unterschieden wird, eine reine Schubbeanspruchung. Im Rahmen der Elastizitätstheorie lässt sich der Elastizitätsmodul  $E$  in Verbindung mit dem Schubmodul  $G$  und der Querdehnzahl  $\nu$  im Allgemeinen schreiben als  $E = G \cdot 2(1 + \nu)$ . Die Anwendung des „Shear-Lag“-Konzeptes nach COX für Faserauszugprobleme erfordert die in der Literatur übliche Definition  $r_1 = r_m$  [Nai97]. Eine Erweiterung durch BUDIANSKY ET AL. ergänzt den starr gekoppelten Faser-Matrix-Verbund um einen außen liegenden Matrixzylinder, der entsprechend der zugbeanspruchten Faser Zugspannungen aufnimmt [BHE86], wie in der folgenden Abbildung 4.4 entsprechend dem Zylinderkoordinatensystem in Abbildung 3.3 dargestellt.

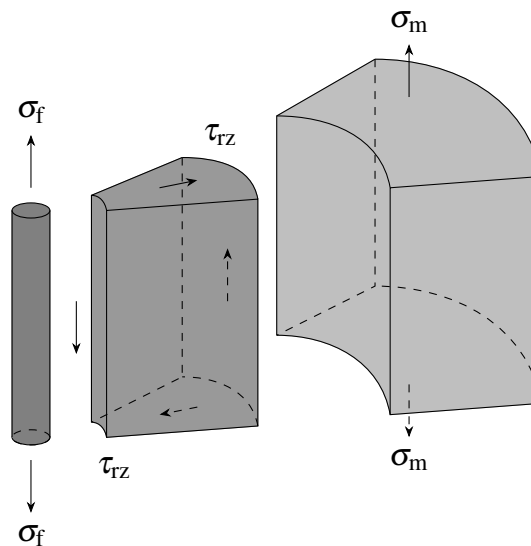


Abbildung 4.4: Schematische Darstellung der Kraftübertragung zwischen Faser, Verbundzone und Matrix entsprechend dem „Shear-Lag“-Konzept nach [BHE86]

Auf der Basis einer umfassenden Analyse beschreibt NAIRN die übereinstimmenden Grundlagen der unzähligen, in der Literatur vorhandenen „Shear-Lag“-Modelle und wertet diese im Vergleich zu den ursprünglichen Modellgrundlagen von COX und durch Gegenüberstellung mit den Ergebnissen von numerischen Berechnungen mit der Finite-Elemente-Methode aus. Eine Kombination von vier maßgebenden Annahmen und Vereinfachungen werden von NAIRN als am häufigsten in Verbindung mit dem „Shear-Lag“-Konzept angewendet hergeleitet.

Zunächst hebt NAIRN die den meisten „Shear-Lag“-Modellen zugrunde liegende Annahme, dass die Schubverzerrungen

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.11)$$

aufgrund von  $|\frac{\partial u}{\partial z}| \ll |\frac{\partial w}{\partial r}|$  näherungsweise als

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} \quad (4.12)$$

und damit unabhängig von der Längsrichtung  $z$  betrachtet werden, als fundamentale Vereinfachung des „Shear-Lag“-Konzeptes hervor [Nai97]. Mit der Verallgemeinerung der exakten Beschreibung der Schubspannungen zu

$$\tau_{rz} = \frac{f_0(z) \cdot r}{2} + \frac{f_1(z)}{r}, \quad (4.13)$$

wobei die Funktionen  $f_i(z)$  mit  $i \in [0; 1]$  im Rahmen der „Shear-Lag“-Modellierung nicht linear, sondern beliebig sind, wird in der Anwendung des „Shear-Lag“-Konzeptes eine weitere Vereinfachung vorgenommen [Nai97]. Durch die Verwendung des eindimensionalen HOOKE'schen Gesetzes werden Spannungen quer zur Faserlängsachse vernachlässigt, sodass implizit

$$(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (4.14)$$

angenommen wird [Nai97]. Darüber hinaus wird generell bei der Verbindung des eindimensionalen HOOKE'schen Gesetzes mit den Gleichgewichtsbedingungen vorausgesetzt, dass die Abhängigkeit der Spannung  $\sigma_{zz}$  und Verschiebung  $w$  in Längsrichtung näherungsweise unabhängig vom Radius  $r$  sind [Nai97].

Mithilfe der Gleichgewichtsbedingung in Längsrichtung, i. e. die zweite Gleichung in (4.3), können nach NAIRN die grundlegenden Bestimmungsgleichungen der „Shear-Lag“-Modellierung mit den unbekannten Funktionen für  $\tau_{rz}(z)$  und  $w(z)$  jeweils in der Kontaktzone und im weiter entfernten Matrixbereich hergeleitet und an die Randbedingungen angepasst werden [Nai97]. Die Anpassung der Bestimmungsgleichungen auf eine vereinfachende Modellvorstellung zum Faserauszugproblem, vgl. Abbildung 4.4, ergibt die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 \tau_{rz}(r_f)}{\partial z^2} - \beta^2 \tau_{rz}(r_f) = 0 \quad (4.15)$$

[Nai97]. Ausgehend vom Kräftegleichgewicht zwischen der Faser und der Verbundzone mit der über die Querschnittsfläche gemittelten Faserlängsspannung  $\langle \sigma_{zz,f} \rangle$  und der Schubspannung  $\tau_{rz}(r_f)$  in der Kontaktzone analog zu Gleichung 2.4

$$\frac{\partial \langle \sigma_{zz,f} \rangle}{\partial z} = - \frac{2 \cdot \tau_{rz}(r_f)}{r_f} \quad (4.16)$$

leitet er mit der Differenzialgleichung des Verbundes (4.15) die Differenzialgleichung von COX (4.7) in veränderter Schreibweise zu

$$\frac{\partial^2 \langle \sigma_{zz,f} \rangle}{\partial z^2} - \beta^2 \cdot \langle \sigma_{fz} \rangle = -\beta^2 \langle \sigma_{zz,f}^\infty \rangle \quad (4.17)$$

her [Nai97]. Darin ist  $\langle \sigma_{zz,f}^\infty \rangle$  die gemittelte Faserlängsspannung einer unendlich langen Faser in einer unendlich ausgedehnten Matrix. Anders als in der Herleitung von COX ist die Definition

des „Shear-Lag“-Parameters  $\beta$  in Anlehnung an die Literatur zu

$$\beta^2 = \frac{2}{r_f^2 E_f E_m} \cdot \left( \frac{E_f V_f + E_m V_m}{\frac{V_m}{4G_f} + \frac{1}{2G_m} \left( \frac{1}{V_m} \cdot \ln \left( \frac{1}{V_f} \right) - 1 - \frac{V_m}{2} \right)} \right) \quad (4.18)$$

gewählt, worin die Volumenanteile der Faser und der Matrix zu  $V_f = r_f^2 / r_m^2$  respektive  $V_m = (r_m^2 - r_f^2) / r_m^2$  bestimmt werden [Nai97].

Die Lösung der Differenzialgleichung (4.17) für das vereinfachte Faserauszugproblem, dargestellt in Abbildung 4.4, bestehend aus einem Matrixzylinder mit dem Radius  $r_m$  und der Länge  $\ell$  und der über die gesamte Länge eingebetteten Faser mit dem Radius  $r_f$ , führt auf die Verlaufsfunktionen der gesuchten Spannungen und Verschiebungen im Faser-Matrix-Verbund. Für die Schubspannung  $\tau_{rz}(r = r_f, z)$  in der Kontaktebene gilt nach NAIRN

$$\frac{\tau_{rz}(r = r_f, z)}{\langle \sigma_{zz,f}^\infty \rangle} = \frac{r_f \cdot \beta}{2} \cdot \frac{\sinh(\beta z)}{\cosh(\beta \ell / 2)} \quad (4.19)$$

[Nai97]. Die mittlere Faserzugspannung im Faserauszugproblem nach Abbildung 4.4 mit starrem Verbund lautet

$$\frac{\langle \sigma_{zz,f}(z) \rangle}{\langle \sigma_{zz,f}^\infty \rangle} = 1 + \frac{\langle \sigma_{zz,m}^\infty \rangle}{\langle \sigma_{zz,f}^\infty \rangle} \cdot \frac{V_m}{V_f} \cdot \frac{\cosh(\beta z)}{\cosh(\beta \ell / 2)} \quad (4.20)$$

[Nai97]. NAIRN analysiert außerdem die Kraftübertragung in einem Faser-Matrix-Verbund, in dem die Faser als gerissen angenommen wird und damit an den Faserenden unbelastet ist, während die Matrix an den Rändern des Zylinders Kräfte überträgt [Nai97]. Vergleichsrechnungen mit der Finite-Elemente-Methode, auf deren Konfiguration nicht detailliert eingegangen wird, ergeben, dass insbesondere die fundamentale Annahme des „Shear-Lag“-Konzeptes mit  $|\frac{\partial u}{\partial z}| \ll |\frac{\partial w}{\partial r}|$  nicht gültig ist, sondern die Anteile  $\frac{\partial u}{\partial z}$  und  $\frac{\partial w}{\partial r}$  annähernd gleich groß mit umgekehrtem Vorzeichen sind und daraus wesentlich geringere Schubverzerrungen  $\gamma_{rz}$  folgen [Nai97]. Die Schubverzerrungen aus der „Shear-Lag“-Analyse sind etwa doppelt so groß wie in den numerischen Ergebnissen und verschwinden nicht am unbelasteten Faserende, was der analytischen Randbedingung der Spannungsfreiheit im Faserriss widerspricht [Nai97]. Trotz dieser Diskrepanzen wird die mittlere Faserspannung  $\langle \sigma_{zz,f} \rangle$  in Längsrichtung aus der „Shear-Lag“-Analyse im Vergleich mit der Näherungslösung der FEM-Simulation sehr gut angenähert [Nai97]. Dabei kann der infolge der Bestimmungsgleichungen der „Shear-Lag“-Analyse stets exponentielle Verlauf der Faserspannungen durch die FEM-Simulation nur näherungsweise bestätigt werden [Nai97].

Darüber hinaus werden nur für hohe Fasergehalte, d. h. für geringe Radien der umliegenden Matrixzylinder, qualitativ gute Ergebnisse mit der „Shear-Lag“-Analyse erzielt; für die Beschreibung der Kraftübertragung im Faserauszugproblem im elastischen Halbraum ist das „Shear-Lag“-Konzept nicht geeignet [Nai97]. Die Schubspannungen  $\tau_{rz}(r = r_f, z)$  in der Kontaktzone als Ableitung der Faserspannung  $\sigma_{zz,f}$  in Faserlängsrichtung weist deutlich größere Abweichungen von den numerischen Ergebnissen auf als die Faserspannung selbst [Nai97]. Auch die Bestimmung von Spannungen quer zur Faserlängsachse ist prinzipiell auf Basis einer „Shear-Lag“-Analyse möglich, aber mit großen Unsicherheiten behaftet [Nai97]. Insgesamt kann daher mithilfe des „Shear-Lag“-Konzeptes nur eine qualitative Aussage zur Spannungsverteilung im Faser-Matrix-

Verbund getroffen werden, weshalb ein Vergleich des eigenen Verbundmodells mit einer „Shear-Lag“-Analyse nur eine geringe Aussagekraft bezüglich Verifikation des Modells hat.

Basierend auf der Beschreibung der Kraftübertragung im starren Verbund mit dem „Shear-Lag“-Konzept wurden außerdem Modellansätze zur Beschreibung des Debondings und dessen Stabilität entwickelt, vgl. z. B. [Law72], [Pig87], [Hsu90], [KBM91], und hinsichtlich der rissüberbrückenden Fasertragwirkung in Faserverbundwerkstoffen mit parallel ausgerichteten und ungerichteten Fasern auf Basis von Energiebilanzierung oder Bruchmechanik weiterentwickelt, vgl. z. B. [Pig66], [ACK71], [AK73], [Law82], [MCE85], [SS86], [BHE86], [GS87], [McC87], [HJ90], [HB91], [BEH95], [LG98]. Weitere Erläuterungen zur rissüberbrückenden Fasertragwirkung sind in Kapitel 6.3 zu finden.

#### 4.1.4 Numerische Modellierung mit Interface-Elementen

Mit numerischen Berechnungsmethoden wie der Finite-Elemente-Methode und der Diskrete-Elemente-Methode stehen heute Hilfsmittel für sehr detaillierte und realitätsnahe Analysen der Kraftübertragung zwischen Faser und Matrix zur Verfügung. 1975 stellt SCHÄFER zwei- und eindimensionale Kontaktelemente zur Lösung von Kontaktproblemen mit der Finite-Elemente-Methode vor, die basierend auf einer vorgegebenen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung aus der relativen Verschiebung der angrenzenden Strukturelementknoten die Verbundreaktion beschreiben [Sch75a]. Weiterentwickelt zu nichtlinearen, isoparametrischen, ein- und zweidimensionalen Interface-Elementen stellen diese Kontaktelemente, häufig als „Zero-Thickness“-Interface-Element bezeichnet, die Grundlage für numerische Untersuchungen mit der Finite-Elemente-Methode dar [MKKK85], [Kau84], [KM87].

Die Verwendung von zweidimensionalen Interface-Elementen zur Beschreibung der Verbundreaktion in dreidimensionalen FEM-Simulationen erweist sich gegenüber der expliziten dreidimensionalen Modellierung der Grenzschicht insofern als vorteilhaft, dass insbesondere bei geringen Schichtdicken eine sehr feine Diskretisierung und der damit verbundene erhöhte numerische Aufwand vermieden wird und eine vereinfachende, klare Beschreibung der Verbundreaktion anstelle einer exakten Erfassung der Prozesse und Materialeigenschaften der realen, dreidimensionalen Grenzschicht möglich ist [KM87], [Has90], [CH98], [Nai07]. Für die Beschreibung von Grenzschichten endlicher Dicke in der Verbundzone und deren Auswirkungen auf das Spannungs-Deformations-Verhalten des Faser-Matrix-Verbundes schlägt HASHIN 1990 imperfekte Interface-Elemente vor [Has90], [Has91b], [Has91a], die z. B. von NAIRN zur Analyse von Kurzfaserverbundwerkstoffen mit einem „Shear-Lag“-Modell angewendet werden [Nai04], [Nai07], [NS15]. Erläuterungen zur Definition und Implementierung von isoparametrischen „Zero-Thickness“-Interface-Elementen, wie sie im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden, sind in Kapitel 5.2 dargestellt.

Die mithilfe von Interface-Elementen beschriebene lokale Verbundreaktion wird mit einem Verbundgesetz, i. e. eine parametrisierte, ortsunabhängige Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung zur Ermittlung des lokalen Verbundverhaltens, charakterisiert. Dieses Verbundgesetz erfasst den Spannungs-Deformations-Zustand der Faser und der umgebenden Betonmatrix sowie weitere Einflüsse z. B. aus Materialinhomogenitäten und ermöglicht dabei die Ableitung einer Verbundsteifigkeit. RITTER weist im Bezug auf das Verbundverhalten von geripptem Betonstahl mit Normalbeton darauf hin, dass aussagekräftige Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen nur bei kontrolliertem Auszugversagen angegeben werden können und aufgrund der Abhängigkeit

vom Versuchsaufbau keine Allgemeingültigkeit besitzen [Rit14]. Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen ermöglichen jedoch auch die anschauliche Darstellung des Verbundwiderstandes in den verschiedenen Phasen und Übergängen des Verbundverhaltens sowie den Vergleich unterschiedlicher Verbundwerkstoffe anhand der in Kapitel 3.4 genannten Einflussfaktoren.

#### 4.1.5 Verbundgesetze

Neben der Anwendung von Verbundgesetzen in Strukturanalysen mit der Finite-Elemente-Methode ist die Kenntnis eines analytischen Zusammenhanges zwischen Verbundspannung und Schlupf auch für die Bestimmung von Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen für die Querschnittsbemessung von Verbundwerkstoffen erforderlich. In Kapitel 2.3 wurde die Herleitung der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung (2.7) von HARTWICH mit einem starr-plastischen Verbundgesetz, das von einer über die gesamte Verbundfläche konstanten Verbundspannung ausgeht, gezeigt, vgl. Abbildung 4.5 links. Im Folgenden werden weitere ausgewählte Modellansätze vorgestellt, die das Verbundverhalten von verschiedenen Differenzialgleichungen ausgehend mithilfe eines vereinfachenden Verbundgesetzes analytisch beschreiben.

Auf Basis der Differenzialgleichung (4.5) des verschieblichen Verbundes bestimmt PFYL das Auszugverhalten einer Einzelfaser mit einem linear-elastisch-abgetrepppt-ideal-plastischen Verbundgesetz nach HARTWICH, GOPALARATNAM & SHAH und NAAMAN ET AL., vgl. Abbildung 4.5 rechts, das in Anlehnung an das „Shear-Lag“-Konzept einen linear-elastischen Bereich für die Phase des starren Verbundes und ein ideal-plastisches Materialverhalten für den verschieblichen Verbund über einen Verbundspannungssprung kombiniert [Har86], [NNAN91], [Pfy03]. Dabei unterscheidet er die Faseraktivierungs- und Faserauszugphase und ermittelt den Verlauf von Verbundspannung, Faser- und Matrixspannung sowie Relativverschiebung über die Einbindelänge. Im Vergleich zur Beschreibung des Auszugverhaltens mit dem starr-plastischen Verbundgesetz kommt er zu dem Schluss, dass die Bestimmung der Spannungs-Rissöffnungs-Beziehung mit dem starr-plastischen Verbundgesetz hinreichend genaue Ergebnisse liefert und aufgrund der problematischen experimentellen Ermittlung der initialen Verbundsteifigkeit bevorzugt angewendet werden sollte [Pfy03].

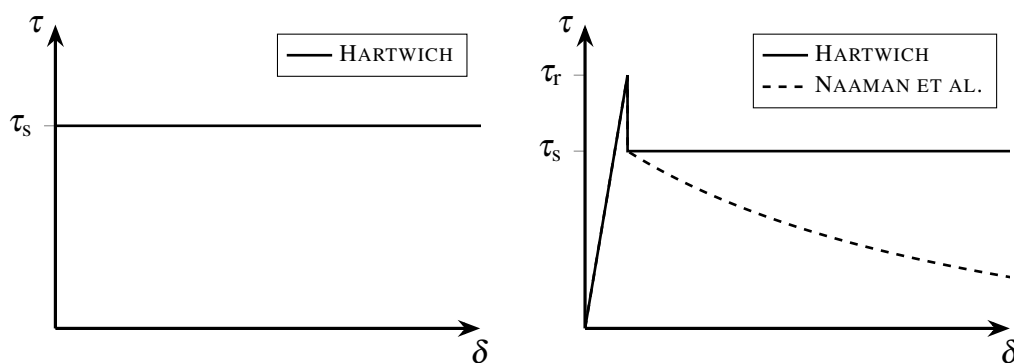


Abbildung 4.5: Vereinfachende Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen nach HARTWICH und NAAMAN ET AL. aus [Har86], [NNAN91]

Ohne die Verwendung der Differenzialgleichung des verschieblichen Verbundes (4.5) leiten NAAMAN ET AL. eine Differenzialgleichung zweiten Grades zur Ermittlung der Faserkraft  $F_{zz,f}$  im elastischen Verbund mit dem linear-elastisch-abgetrepppt-ideal-plastischen Verbundgesetz her



[NNAN91]. Mit dem vereinfachenden Kräftegleichgewicht zwischen Faser und Matrix, hier in der Notation dieser Arbeit,

$$P_z = F_{zz,f} + F_{zz,m} = A_f \cdot E_f \cdot \varepsilon_{zz,f} + A_m \cdot E_m \cdot \varepsilon_{zz,m} \quad (4.21)$$

folgt aus

$$\frac{\partial^2 F_{zz,f}}{\partial z^2} = U_f K_b \cdot (\varepsilon_{zz,f} - \varepsilon_{zz,m}) \quad (4.22)$$

die Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 F_{zz,f}}{\partial z^2} - F_{zz,f} \cdot U_f K_b \left( \frac{1}{A_f E_f} + \frac{1}{A_m E_m} \right) = -P \cdot \frac{U_f K_b}{A_m E_m}, \quad (4.23)$$

die von NAAMAN ET AL. mithilfe einer exponentiellen Ansatzfunktion ( $e^{\lambda x}$  und  $e^{-\lambda x}$ ) gelöst wird [NNAN91]. Der daraus folgende Verlauf der Verbundspannung über die Verbundlänge im als linear-elastisch modellierten starren Verbund entspricht qualitativ dem von PFYL angegebenen Schubspannungsverlauf, der aus Lösung der Differenzialgleichung des verschieblichen Verbundes mithilfe von Hyperbelfunktionen ( $\sinh(x)$  und  $\cosh(x)$ ) abgeleitet wurde. Für den verschieblichen Reibverbund wird entsprechend des linear-elastisch-abgetrepppt-ideal-plastischen Verbundgesetzes ein konstanter Verbundspannungsverlauf angesetzt. Als Erweiterung dieses vereinfachenden Verbundgesetzes schlagen NAAMAN ET AL. eine Berücksichtigung der Fehlpassung zwischen Faser und Matrix und eine Degradation des Reibverbundes vor [NNAN91]. Das modifizierte Verbundgesetz ist ebenfalls in Abbildung 4.5 rechts dargestellt.

Aufbauend auf der analytischen Modellierung von NAAMAN ET AL. und für ein linear-elastisches Verbundgesetz entwickelt KULLAA für einen elastischen Faser-Matrix-Verbund mit zwei parallel ausgerichteten Faserreihen mit verschiedenen angeordneten Faserenden ein Modell zur Beschreibung der Kraftübertragung im Verbundwerkstoff im Hinblick auf einen mehrfach gerissenen Zustand und unter Berücksichtigung statistisch verteilter Faserorientierungen, vgl. z. B. [Kul94], [Kul96], [Kul98a], [Kul98c], [Kul98b].

Ein weiteres Beispiel für die analytische Bestimmung des Verbundspannungsverlaufes über die Verbundlänge liefert ZHAN für ein dreiphasiges Verbundgesetz, dargestellt in Abbildung 4.6, links, [Zha16]. Anders als etwa NAAMAN ET AL. setzt ZHAN zur Herleitung der Differenzialgleichung, hier in die Notation dieser Arbeit überführt,

$$\frac{dF_{zz,f}(\zeta)}{d\zeta^2} = \lambda^2 F_{zz,f}(\zeta) \quad (4.24)$$

mit

$$\lambda^2 = \frac{\pi d_f G}{A_f E_f} \quad (4.25)$$

für die Bestimmung der axialen Faserzugkraft  $F_{zz,f}$  in Abhängigkeit der lokalen Koordinate  $\zeta$  entlang der Verbundlänge die Kompatibilität der Faserdehnung mit der Änderung des Schlupfes über die Einbindelänge  $\ell_e$  voraus, wobei der Schubmodul  $G$  die Steifigkeit der Verbundzone im

elastischen Verbund analog zum „Shear-Lag“-Konzept darstellt, und erhält

$$F_{zz,f}(\zeta) = P \frac{\sinh(\lambda \zeta)}{\sinh(\lambda \ell_e)} \quad (4.26)$$

für die Randbedingungen, dass die Faserzugkraft am eingebetteten Ende verschwindet und am Faseraustrittsort der Belastung  $P$  entspricht [Zha16]. Während infolge des Verbundgesetzes von ZHAN die Ablösung der Faser von der Matrix zu einer konstanten Verbundspannung über die Verbundlänge führt, folgt aus der Lösung der Differenzialgleichung ein exponentieller Verlauf der Verbundspannungen [Zha16].

Charakteristisch für das in Abbildung 4.6 links dargestellte Verbundgesetz von ZHAN ist die Beschreibung der Übergangsphase zwischen linear-elastischem Verbund und dem ideal-plastischen Reibverbund. ZHAN wählt eine Kombination aus zunächst ideal-plastischem und dann exponentiell abnehmendem Verbundwiderstand bis zu einer konstanten Reibverbundspannung, vgl. Abbildung 4.6 links. Eine zweistufige Übergangsphase weist auch das Verbundgesetz für gerippten Betonstahl aus dem MODEL CODE auf, das STENGEL für die Anwendung als Verbundgesetz für den Faser-Matrix-Verbund modifiziert [fib93], [fib13], [Ste13]. Ähnlich wie bei ZHAN folgen auf einen nichtlinear-elastischen Anstieg der aufnehmbaren Verbundspannung ein Plateau und ein anschließender linearer Übergang zu einer geringeren ideal-plastischen Reibverbundspannung, vgl. Abbildung 4.6 rechts. Außerdem schlägt STENGEL als Vereinfachung ein zweistufig-starr-plastisches Verbundgesetz vor, das den nichtlinearen Anstieg des Verbundwiderstandes durch eine Verlängerung des Plateaus ersetzt, ebenfalls dargestellt in Abbildung 4.6 rechts. Für beide Kurvenverläufe werden im Bezug auf experimentelle Untersuchungen Parameter gewählt, um das Verbundverhalten von Mikrostaahlfasern in UHPC zu beschreiben, vgl. [Ste13].

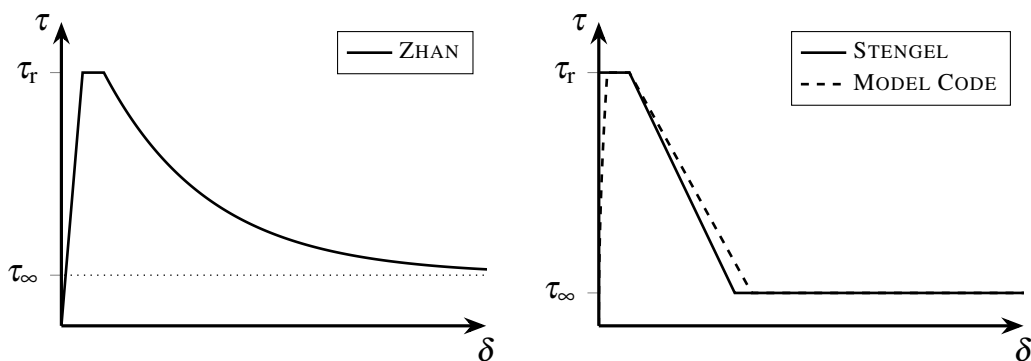


Abbildung 4.6: Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung nach ZHAN und nach STENGEL im Vergleich zum MODEL CODE-Ansatz aus [Zha16], [Ste13], [fib13]

Die folgende Abbildung 4.7 zeigt zwei Verbundgesetze für den Faser-Matrix-Verbund mit normalfestem Beton und glatten Stahlfasern mit nichtlinearem Verlauf in beiden Verbundphasen, wobei der Übergang zwischen ansteigendem und abnehmendem Verbundwiderstand mit einem Knick das Debonding markiert. Der parabelförmige Anstieg entspricht dabei der Formulierung des elastischen Verbundes nach MODEL CODE, vgl. [CBSC08], [FV07], [fib13].

Für die Beschreibung des abnehmenden Verbundwiderstandes verwenden CUNHA ET AL. eine Hyperbelfunktion, vgl. Abbildung 4.7 rechts, mit der der Verbundwiderstand bei zunehmendem Schlupf asymptotisch verschwindet [CBSC08]. CUNHA ET AL. lösen die Differenzialgleichung

des verschieblichen Verbundes (4.5) mit ihrem Verbundgesetz zur analytischen Beschreibung des Auszugsverhaltens [CBSC08]. FANTILLI & VALLINI formulieren den abnehmenden Verbundwiderstand hingegen als Exponentialfunktion mit einem Endwert  $\tau_\infty$ , ab dem die Verbundspannung näherungsweise bei zunehmendem Schlupf konstant bleibt. Basierend auf dieser Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung bestimmen sie in einem numerischen Iterationsprozess das Auszugverhalten parallel eingebetteter Fasern mit kohäsiven Interface-Modellen [FV07].

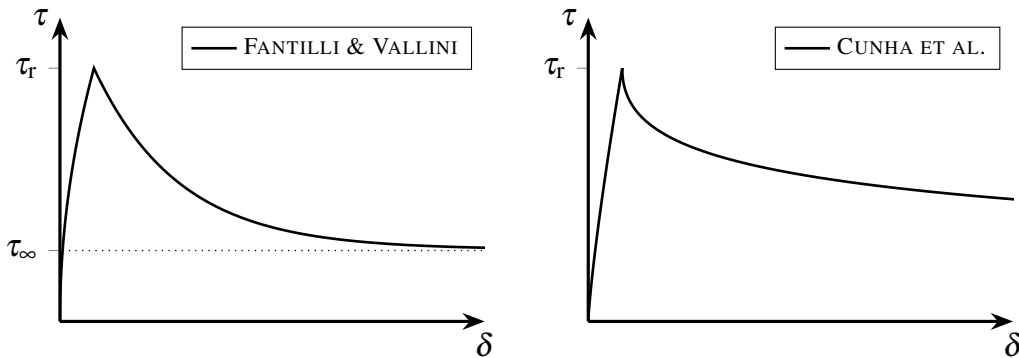


Abbildung 4.7: Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung nach FANTILLI & VALLINI und nach CUNHA ET AL. aus [FV07], [CBSC08]

Alle dargestellten Verbundgesetze beschreiben das tatsächliche, stark nichtlineare Verbundverhalten zwischen Mikrostauffasern und UHPC vereinfachend. Während diese Vereinfachungen für die Anwendung in numerischen Analysen mit der Finite-Elemente-Methode im Allgemeinen günstig sind, ist die zu erwartende Güte der Ergebnisse bei detaillierter Untersuchung des Verbundverhaltens und des Auszugverhaltens aufgrund der nicht erfassten Einflüsse als eher gering zu bewerten. Daher werden diese Modelle hauptsächlich zur Abschätzung des maximalen Auszugswiderstandes angewendet. Zwar unterscheiden nahezu alle Verbundgesetze zwischen starrem oder quasi-starrem elastischem und verschieblichem Verbund und bilden das Debonding als Übergangsbereich dazwischen mit ab, aber eine Trennung der querdruckabhängigen und querdruckunabhängigen Verbundmechanismen erfolgt nicht. Damit kann der Einfluss des Spannungs-Deformations-Zustandes um die eingebettete Faser nicht abgebildet werden. NAAMAN ET AL. berücksichtigen zwar die Veränderung der Fehlpassung und damit der Kontaktspannung zwischen Faser und Matrix infolge des Auszuges, allerdings nicht in Form einer dreidimensionalen Modellierung, vgl. Kapitel 3.2.

Eine realitätsnahe Beschreibung des Verbundverhaltens auf Basis eines Verbundgesetzes ist nur möglich, wenn die Auswertung der lokalen Materialeigenschaften im Zusammenhang mit dem aktuellen Spannungs-Deformations-Zustand sowie der beanspruchungs- und gegebenenfalls zeitabhängigen Entwicklungsgeschichte eine ortsspezifische Bestimmung der Verbundreaktion erlaubt. Diese Verbundreaktion wirkt in der Realität dreidimensional, d. h. als Reaktion auf eine Verformung der Grenzschicht werden Kräfte in tangentialer und normaler Richtung bezogen auf die Kontaktfläche generiert. Insbesondere im Hinblick auf eine Ermüdung des Verbundes sollte das Verbundgesetz eine kontinuierlich einwirkende Relativverschiebung infolge einer wiederholten Be- und Entlastung und die daraus resultierende Degradation der Verbundkapazität berücksichtigen. Die meisten Verbundgesetze aus der Literatur nehmen stattdessen vereinfachend eine über die Verbundlänge konstante Reibverbundspannung an, die bei großen Verschiebungsdifferenzen unabhängig vom Schlupf definiert ist, vgl. Abbildung 4.5, 4.6, 4.7. Da das Interesse

in dieser Forschungsarbeit im detaillierten Verständnis des Verbundverhaltens und des Auszugverhaltens im Faser-Matrix-Verbund zwischen Mikrostaahlfasern und UHPC liegt, eignet sich ein derart vereinfachendes Verbundgesetz nicht zur Beschreibung der mikrophysikalischen Prozesse in der Verbundzone.

#### 4.1.6 Verbundmodelle für nichtlineare Finite-Elemente-Analysen

Zur Verbesserung des Verständnisses für das Verbundverhalten zwischen geripptem Bewehrungsstahl und Beton entwickeln COX und HERRMANN ein Verbundmodell für nichtlineare Finite-Elemente-Analysen mit Interlocking-Effekten, vgl. [HC94]. Die zweidimensionale Beschreibung des Verbundverhaltens mit der Interaktion der Verbundwirkung parallel und senkrecht zur Kontaktebene gilt in den 1990er-Jahren als neuartiger Modellierungsansatz für den Verbund von gerippten Betonstahl und Beton und wird auch von weiteren Autoren erarbeitet, vgl. [CH98], [Lun99]. Das elasto-plastische Materialmodell von COX & HERRMANN beinhaltet eine Fließbedingung, die mithilfe einer Wichtungsfunktion zwei Kriterien im Bezug auf die maßgebenden Versagensmechanismen, Spaltzug- und Auszugversagen, verbindet [CH98]. Darüber hinaus werden neben elastischen Relativverschiebungen in Analogie zum „Shear-Lag“-Konzept auch inelastischer Schlupf, welcher mithilfe einer nichtassozierten Fließregel und einer Potenzialfunktion zur Beschreibung der Aufweitung der Verbundzone infolge des inelastischen Schlupfes bestimmt wird, und eine Verbundzonenschädigung (*engl.* bond zone damage) in Abhängigkeit der tangentialen, inelastischen Relativverschiebung definiert [CH98]. Durch die zunehmende Verbundzonenschädigung und eine kinematische Entfestigungsfunktion wird, wie in der folgenden Abbildung 4.8 dargestellt, eine nichtlineare Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung für den Verbund von geripptem Bewehrungsstahl und normalfestem Beton generiert, vgl. [CH98], [CH99].

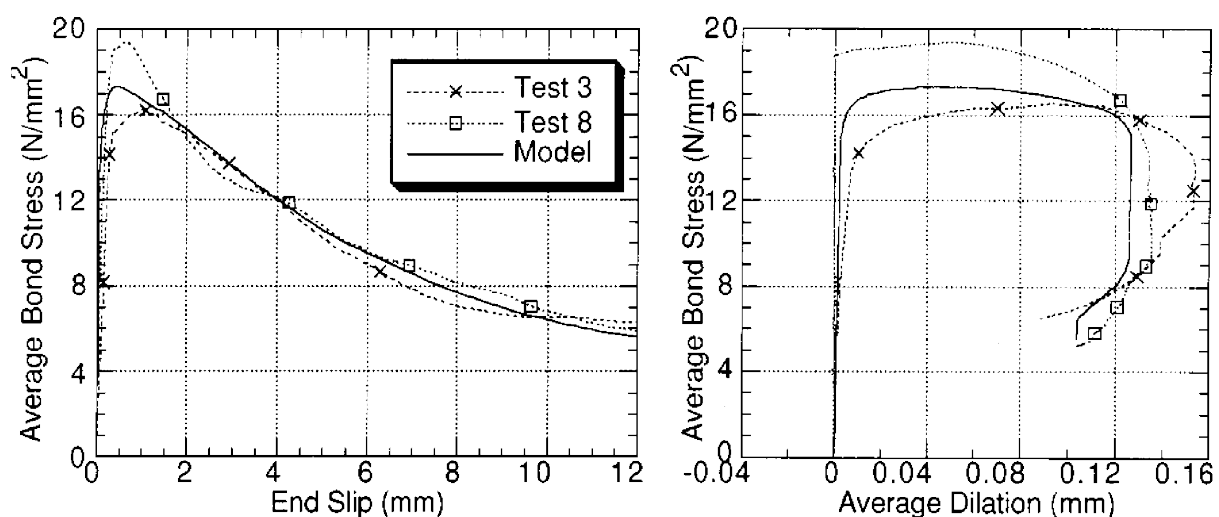


Abbildung 4.8: Exemplarische Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung nach Kalibrierung des Verbundmodells von COX & HERRMANN aus [CH98]

Ebenfalls zunächst als zweidimensionales Modell in Analogie zum Verbundmodell von COX & HERRMANN entwickelt, erweitert LUNDGREN die Beschreibung des Verbundverhaltens auf

drei Dimensionen und berücksichtigt damit die Verbundwirkung in Umfangsrichtung des Bewehrungsstabes, vgl. [Lun99], [Lun05]. Anders als COX & HERRMANN formuliert LUNDGREN zwei unabhängige Fließbedingungen zur Begrenzung der Verbundspannungen  $\tau_t$  und  $\tau_n$  parallel und senkrecht zur Auszugrichtung hinsichtlich des Reibverbundes (Kriterium  $F_1$ ) und des Betonbruchs infolge des Auszuges (Kriterium  $F_2$ ) [Lun05], vgl. Abbildung 4.9.

Das Mehrflächenplastizitätsmodell entwickelt die Verbundreaktion zu elastischen und inelastischen Relativverschiebungen, die mit einer assoziierten und einer nichtassoziierten Fließregel für die beiden Flächen sowie einer Kombination nach KOITER für die ausgerundeten Überschneidungsbereiche generiert werden [Lun05]. Zusätzlich ist eine Verfestigungsvariable  $\kappa$  in Abhängigkeit des inelastischen Schlupfes definiert, der die Degradation der Verbundkapazität infolge zunehmenden Schlupfes für beide Versagenskriterien steuert [Lun05]. Auch in diesem Modell verläuft die Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung für den Auszugversuch von geripptem Bewehrungsstahl aus Normalbeton nichtlinear [Lun05].

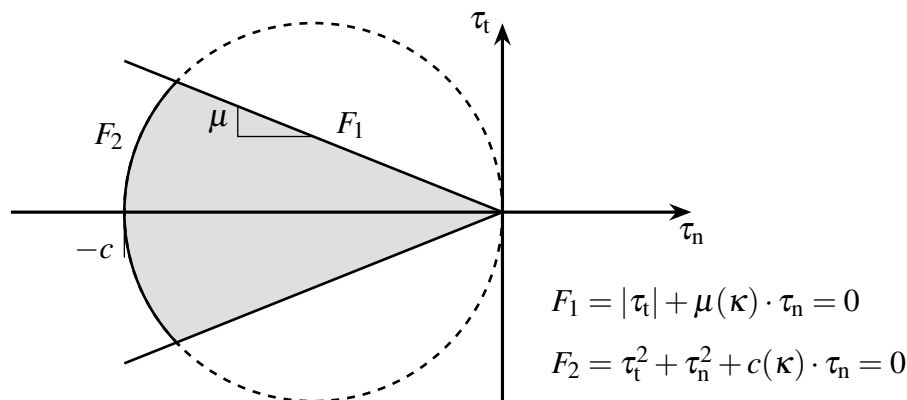


Abbildung 4.9: Mehrflächenplastizitätsmodell zur Beschreibung des Verbundverhaltens von geripptem Betonstahl und Normalbeton von LUNDGREN nach [Lun05]

Weiterentwicklungen dieser grundsätzlichen, elasto-plastischen Verbundmodelle hinsichtlich der Erfassung der dreidimensionalen mechanischen Interaktion zwischen den Rippen des Betonstahles und den als Betonrippen aufgefüllten Stahlrippenabständen sind z. B. von ALFANO & SACCO, SERPIERI & ALFANO und MURCIA-DELISO & SHING zu finden [AS06], [SA11], [MDS16]. Auf die in diesen Arbeiten verwendeten kohäsiven Interface-Elemente, bei SERPIERI & ALFANO als aus mehreren mikroskopisch kleinen Flächen zusammengesetzte „Repräsentative Interface-Elemente“ modelliert, wird im Kapitel 5.2 eingegangen.

Obwohl die Definition eines vereinfachenden Verbundgesetzes als eine lokale Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung für nichtlineare Finite-Elemente-Analysen vorteilhaft ist, umgesetzt und ausgewertet z. B. in [LOE<sup>+</sup>19], kann nur mit einer dreidimensionalen Modellierung etwa mithilfe der Plastizitätstheorie analog zu den Verbundmodellen von COX & HERRMANN und LUNDGREN der im Rahmen dieser Arbeit erforderliche Detaillierungsgrad zur Auswertung der in Kapitel 3.1 erläuterten Verbundmechanismen und mikrophysikalischen Einflüsse auf die Fasertragwirkung erreicht werden. Im folgenden Kapitel wird das für die Beschreibung des Verbundverhaltens von Mikrostahtfasern mit UHPC entwickelte Verbundmodell vorgestellt.

## 4.2 Materialmodell zur Beschreibung des Verbundverhaltens

Zur Beschreibung des Verbundverhaltens zwischen einer glatten Faseroberfläche und einer feinkörnigen UHPC-Matrix wird im Rahmen dieser Arbeit ein gekoppeltes Plastizitäts- und Schädigungsmodell entwickelt, das die in Kapitel 3 dargelegten Verbundmechanismen und Entwicklungsprozesse infolge von Relativverschiebungen in der Verbundzone wiedergibt. Die Materialgleichungen sowie ihre zeitliche Diskretisierung und Integration werden im folgenden Kapitel vorgestellt. Ergänzend folgen Hinweise zur numerischen Umsetzung des Materialmodells im dreidimensionalen Spannungsraum.

### 4.2.1 Materialgleichungen des Verbundmodells

Die im vorangegangenen Kapitel 4.1 vorgestellten Modellansätze aus der Literatur zeigen, dass die Beschreibung der dreidimensionalen Verbundwirkung und des daraus resultierenden Auszugverhaltens einer eingebetteten Faser eine dreidimensionale Modellierung des lokalen Verbundverhaltens mit Berücksichtigung lokaler Einflüsse, wie der Verbundqualität, der Belastungsgeschichte, des Schädigungszustandes und des veränderlichen Spannungs-Deformations-Zustandes, erfordert. Die grundlegende Eingangsvariable für die Bestimmung der Verbundwirkung ist daher die aktuelle räumliche Relativverschiebung  $\delta$  in der Verbundzone. Die Definition der Modellvariablen  $\delta$  hängt dabei eng mit der Modellierung der Grenzschichtdicke zusammen. Da die ITZ bei UHPC anders als bei Normalbeton nicht als räumlich ausgedehnte, poröse und strukturell schwache Zwischenschicht ausgebildet ist, kann die Verbundzone zwischen Faser und Matrix als räumlich verzahnte Kontaktebene mithilfe von zweidimensionalen „Zero-Thickness“-Interface-Elementen verschmiert modelliert werden, vgl. Kapitel 3.1 und 4.1. Die Relativverschiebung  $\delta$  erfasst daher den Schlupf zwischen den Komponenten und die Interaktion der Komponenten im Bereich der Oberflächenprofilierung und der ITZ. Der Vergleich mit experimentellen Messungen des Schlupfes im Rahmen von Faserauszugversuchen wird in Kapitel 6.2 diskutiert.

Das lokale Verbundverhalten durchläuft, wie in Kapitel 3 erarbeitet, im Rahmen eines vollständigen Faserauszuges, d. h. in Abhängigkeit der Relativverschiebungen zwischen den Komponenten, einen Entwicklungsprozess. Der irreversible Wechsel vom anfänglich vorherrschenden starren Verbund zu verschieblichem Verbund initiiert nicht nur eine signifikante Veränderung der Verbundkapazität, sondern verändert auch die Wirkungsweise der maßgebenden Verbundmechanismen. Dieser Entwicklung wird im entwickelten Materialmodell durch die Einbeziehung von Plastizität Rechnung getragen. Der starre Verbund wird dabei als sehr steifer elastischer Verbund modelliert, wobei elastische Relativverschiebungen insbesondere räumliche Verformungen der Oberflächenverzahnung oder der ITZ umfassen, während die Ausbildung eines Meniskus infolge einer elastischen Verformung der Betonmatrix anders als im „Shear-Lag“-Konzept nicht im Rahmen des Verbundmodells erfasst, sondern durch die umgebende Matrixstruktur selbst beschrieben wird, vgl. [Ler96].

Die elastische Deformation der Verbundzone erreicht insgesamt daher nur eine sehr geringe Größenordnung, während plastische Deformationen unter der Voraussetzung des Kontaktes der Oberflächen bis zur vollständigen Schädigung der Verbundzone ungehindert anwachsen können. Darüber hinaus unterliegt die Verbundkapazität einer schädigungsinduzierten Degradation, die insbesondere bei Ermüdungsbeanspruchungen von signifikanter Bedeutung ist. Die Verbundzonenschädigung  $d$  ist dabei in Anlehnung an COX & HERRMANN nicht als Schädigung im

Sinne der Kontinuumschädigungsmechanik sondern in Abhängigkeit der inelastischen Relativverschiebungen formuliert, vgl. [CH98]. Im Folgenden werden die Materialgleichungen des entwickelten Verbundmodells vorgestellt.

Die Verbundwirkung im elastischen Verbund ist proportional zur elastischen Relativverschiebung in der Verbundzone. Der Proportionalitätsfaktor ist die initiale, elastische Verbundsteifigkeit  $E_r$ , mit der ein linearer Zusammenhang zwischen der Relativverschiebung  $\delta$  und der Verbundspannung  $\tau$  formuliert werden kann als

$$\tau = E_r \cdot \delta. \quad (4.27)$$

Der Steifigkeitsmodul  $E_r$  für die erste Verbundphase kann auch richtungsabhängig definiert werden, sodass sich die Verbundsteifigkeit parallel und senkrecht zur Kontaktebene oder in respektive entgegen einer definierten Vorzugsrichtung unterscheidet. Auf die entsprechende Formulierung der Steifigkeitsmatrix wird in Kapitel 5.2 im Bezug auf die verwendeten Interface-Elemente näher eingegangen.

Entsprechend den unterschiedlichen Verbundphasen des starren und verschieblichen Verbundes erfolgt auf der Grundlage der Plastizitätstheorie eine additive Zerlegung von elastischer und inelastischer Relativverschiebung

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}^{\text{el}} + \dot{\delta}^{\text{in}} \quad (4.28)$$

in Ratenformulierung mit der Zeit als unabhängige Beschreibungsvariable, wobei das irreversible lokale Debonding den Übergang zwischen den Phasen markiert. Elastische Relativverschiebungen gehen bei Entlastung vollständig zurück, während inelastischer Schlupf nur durch entgegengerichtete Verschiebungen verringert werden kann. Die Zerlegung der Relativverschiebungen setzt aufgrund der geometrischen Linearisierung der Grundgleichungen für numerische Untersuchungen mit der Finite-Elemente-Methode kleine Verschiebungen und Verzerrungen voraus. In Verbindung mit dem entwickelten Geometriemodell sind die inkrementellen Relativverschiebungen auch bei vollständigem Auszug der Faser aus der Matrix stets klein gegenüber den Abmessungen der Komponenten, sodass die vereinfachende Linearisierung der kontinuumsmechanischen Grundgleichungen zulässig ist. Des Weiteren werden Zwangsbeanspruchungen aus Temperatur- und Feuchtigkeitsänderungen sowie Alterungsprozesse bei der Zerlegung der Relativverschiebung nach Gleichung (4.28) nicht berücksichtigt.

Die aus den Relativverschiebungen  $\delta$  resultierende Beanspruchung der Verbundzone muss entsprechend ihrer Beanspruchbarkeit begrenzt werden. Der dreidimensionale Verbundspannungszustand setzt sich aus Verbundschubspannungen  $\tau_{\parallel}$  parallel und Verbundnormalspannungen  $\tau_{\perp}$  senkrecht zur Kontaktebene zusammen. Analog dazu werden Relativverschiebungen  $\delta_{\parallel}$  parallel und  $\delta_{\perp}$  senkrecht zur Verbundebene unterschieden.

Die Beanspruchbarkeit der Verbundzone ist als Verbundkapazität  $\tau_{\text{lim}}(d)$  in Abhängigkeit der Verbundzonenschädigung  $d$  definiert. Dieser Materialwiderstand setzt sich aus den querdruckunabhängigen Verbundmechanismen Adhäsion und Verzahnung beziehungsweise Mikro-Interlocking zusammen und begrenzt die zulässigen Spannungs-Deformations-Zustände in der Verbundzone mithilfe von Versagenskriterien im Rahmen der Plastizitätstheorie, vgl. Kapitel 3.1. Dabei berücksichtigt die Verbundfestigkeit nicht den Einfluss des Spannungs-Deformations-Zustandes in der Verbundzone und der umgebenden Matrixstruktur. Da sich die Beanspruchbarkeit des Verbundes bei Querdruck und Querkzug erheblich unterscheidet, werden zwei ergänzende Versagenskriterien

zur Begrenzung zulässiger Spannungszustände in der Verbundzone definiert. Bei auftretendem Querdruck vergrößern die Verbundmechanismen Haft- und Gleitreibung die aufnehmbare Verbundspannung signifikant. Dabei ist ein Durchdringen bei Überdrückung der Kontaktflächen nicht zulässig, sodass der dreidimensionale Spannungszustand mithilfe des COULOMB'schen Reibgesetzes unter Berücksichtigung eines lokalen Reibkoeffizienten  $\mu$  zur Beschreibung der Oberflächenrauigkeit erfasst werden kann. Spannungszustände in der Verbundzone müssen daher im Fall einer Kontaktpressung, d. h. im Definitionsbereich negativer Verbundnormalspannungen  $\tau_{\perp}$ , der Bedingung

$$F_c = |\tau_{\parallel}| + \mu(d) \cdot \tau_{\perp} - \tau_{\text{lim}}(d) = 0 \quad \text{mit } D = \{\tau_{\perp} \in \mathbb{R} \mid \tau_{\perp} < 0\} \quad (4.29)$$

genügen.

Auf eine weitere Bruchbedingung zur Begrenzung der aufnehmbaren Betondruckspannung, etwa bei ausgebildeten Druckkegeln mit Zugringen um einen gerippten Bewehrungsstahl, wie im Verbundmodell von LUNDGREN vorgesehen, wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet, da einerseits die durch den Verbund selbst erzeugten Querdruckspannungen bei glatten Fasern wesentlich geringer sind als bei geripptem Bewehrungsstahl und andererseits die Beschreibung des an die vergleichsweise dünne Grenzschicht angrenzenden Betons nicht Bestandteil des Verbundmodells ist. Damit sind mögliche Spannungs-Deformations-Zustände in der Verbundzone bei großem Querdruck, die unter Umständen zu einem Betonbruch führen, nicht durch Versagenskriterien im Verbundmodell begrenzt. Es muss daher sichergestellt sein, dass insbesondere außerhalb des vorgesehenen Anwendungsbereiches des Modells im Rahmen von Simulationen von Faserauszugversuchen ein entsprechendes Strukturmodell für die Betonmatrix verwendet wird, in dem dreidimensionale Druckspannungszustände begrenzt sind.

Bei Querzug muss die aus der kombinierten Beanspruchung parallel und senkrecht zur Kontaktebene resultierende Verbundspannung kleiner sein als die Verbundkapazität  $\tau_{\text{lim}}$ , welche bei einer reinen Scherbeanspruchung der aktuellen Scherfestigkeit der Verbundzone entspricht. Die Abweichung der Verbundzugfestigkeit von der Scherfestigkeit wird durch den Beiwert  $\lambda$  berücksichtigt, der Spannungsanteile senkrecht zur Kontaktebene entsprechend gewichtet. Die Bedingung bei vorherrschendem Querzug, d. h. im Definitionsbereich positiver Verbundnormalspannungen  $\tau_{\perp}$ ,

$$F_t = \tau_{\parallel}^2 - \mu(d) \cdot (\tau_{\text{lim}}(d) - \tau_{\perp})^2 + (1 - \mu(d)) \cdot \left( \left( \frac{\tau_{\perp}}{\lambda} \right)^2 - \tau_{\text{lim}}^2(d) \right) = 0 \quad (4.30)$$

mit  $D = \{\tau_{\perp} \in \mathbb{R} \mid \tau_{\perp} \geq 0\}$

muss sowohl bei Ablösung der Kontaktflächen voneinander als auch bei verschieblichem Verbund stets erfüllt sein, solange Kontakt zwischen den Oberflächen besteht. Die Formulierung in Abhängigkeit des Reibkoeffizienten  $\mu$  ermöglicht einen kontinuierlichen, knickfreien Übergang zwischen den Versagensbedingungen im Bereich verschwindender Verbundnormalspannungen, vgl. Abbildung 4.11.

Der Beiwert  $\lambda$  ermöglicht die Erfassung der zweidimensionalen Anisotropie der Verbundzone, d. h. die Richtungsabhängigkeit des Verbundwiderstandes parallel und senkrecht zur Kontaktebene, und kann beispielsweise experimentell mithilfe von vergleichenden Verbundversuchen mit einer reinen Scher- und einer reinen Zugbeanspruchung ermittelt werden. Die Bestimmung des



Parameters erfolgt dabei z. B. mit der Haftscherfestigkeit  $f_{H\parallel}$  und der Haftzugfestigkeit  $f_{H\perp}$  als

$$\lambda = \frac{f_{H\perp}}{f_{H\parallel}} > 0. \quad (4.31)$$

Obwohl eine Veränderung des Festigkeitsverhältnisses infolge von Relativverschiebungen und Schädigungen denkbar ist, wird im Rahmen dieser Arbeit auf eine schädigungsabhängige Formulierung des Anisotropiebeiwertes verzichtet. Für das gesamte Verbundverhalten werden daher die Adhäsion und die Mikroverzahnung respektive das Mikro-Interlocking gleichbleibend anisotrop bewertet. Nach JUHART beträgt, experimentellen Untersuchungen bezüglich der Adhäsionsfestigkeit zufolge, bei einem Verbund aus poliertem Stahl und UHPC die ertragbare Verbundschubspannung nur ca. 70% der ertragbaren Zugspannung senkrecht zur Kontaktebene [Juh11], was einem Anisotropiebeiwert von ca.  $\lambda = 1,43$  infolge reiner Adhäsion entspricht. Im Hinblick auf eine ausgeprägte Wirkung der Mechanismen Mikroverzahnung und Mikro-Interlocking sind auch Festigkeitsverhältnisse mit  $\lambda \leq 1$  denkbar.

Das Kriterium (4.30) für den Bereich positiver Verbundnormalspannungen stellt im dreidimensionalen Spannungsraum für dem vorgesehenen Anwendungsgebiet entsprechende Modellparameter die Teiloberfläche eines verzerrten Ellipsoides dar, das rotationssymmetrisch um die Koordinatenrichtung der Verbundzugspannungen  $\tau_{\perp}$  ist. JUHART schlägt im Vergleich dazu ein lineares Versagenskriterium für die Beurteilung des adhäsiven Verbundes von Stahl und UHPC vor, das im dreidimensionalen Spannungsraum einem Kegel entspricht [Juh11]. Die Krümmung der Versagensfläche wird insbesondere durch den Reibkoeffizienten  $\mu(d)$  und den Anisotropiebeiwert  $\lambda$  gesteuert. Die Berücksichtigung des Reibkoeffizienten  $\mu(d)$  in der Bedingung (4.30) stellt einen stetigen und stetig differenzierbaren Übergang zur Versagensbedingung (4.29) für den Querdruckbereich sicher. Während das Kriterium (4.30) für  $\mu = 0$  und  $\lambda = 1$  die Oberfläche einer idealen Halbkugel repräsentiert, verzerrt sich diese Kugel mit  $\mu > 0$  zu einem Ellipsoid, der im Übergangsbereich zwischen den Kriterien, d. h. für  $\tau_{\perp} = 0$ , stetig in die Kegelstumpfoberfläche des zweiten Kriteriums übergeht. Für größere Reibkoeffizienten nähert sich das verzerrte Ellipsoid bei positiven Verbundnormalspannungen einem an der Spitze ausgerundeten Kegel. Für bestimmte Parameterkonfigurationen wie beispielsweise  $\mu = 1$  und  $\lambda = 1$  ergibt das Kriterium die Oberfläche einer idealen Kegelspitze. Üblicherweise beträgt der Reibkoeffizient für die Berechnung der Verbundspannungen im Faser-Matrix-Verbund zwischen Beton und Stahl ca.  $\mu = 0,15$ , vgl. [Ste13]. Für Parameterwerte in dieser Größenordnung repräsentiert das Versagenskriterium im Querkzugbereich daher ein Ellipsoid, vgl. Abbildung 4.11.

Auch der Anisotropiebeiwert  $\lambda$  führt zu einer Verzerrung des Ellipsoides, indem der Schnittpunkt mit der Koordinatenachse der Verbundnormalspannungen  $\tau_{\perp}$  bezogen auf die Verbundscherfestigkeit  $\tau_{\text{lim}}$  verschoben wird. Im Zusammenspiel mit dem Reibbeiwert  $\mu$  ergibt sich daher ein mathematisch begründeter Definitionsbereich für diesen Modellparameter. Die folgende Abbildung 4.10 zeigt das rechnerische Verhältnis zwischen der maximal möglichen Verbundnormalspannung  $\tau_{\perp}$  und der Verbundkapazität  $\tau_{\text{lim}}$  in Abhängigkeit des gewählten Modellparameters  $\lambda$  für verschiedene Reibkoeffizienten  $\mu$ . Die Unstetigkeitsstelle in jeder Kurve, ab der die Bestimmung dieses Zusammenhanges nicht mehr im Bereich der reellen Zahlen möglich ist, markiert für jeden Reibkoeffizienten den Grenzwert des anwendbaren Modellparameters  $\lambda$ . Über diesen Grenzwert hinaus gehende Werte für den Anisotropiebeiwert  $\lambda$  führen zu unphysikalischen, konkaven Verläufen der Versagensfläche und sind daher nicht zulässig. Der Parameterwert  $\lambda = 0$  ist ebenfalls nicht zulässig. Das Diagramm zeigt außerdem eine mathematisch bedingte Begrenzung des Definitionsbereiches möglicher Reibkoeffizienten, i. e.  $0 \leq \mu < 1$ .

Mit der grafischen Auswertung des Diagramms in Abbildung 4.10 kann eine vereinfachende Abschätzung der aus der Parameterkombination von  $\mu$  und  $\lambda$  resultierenden Verbundzugfestigkeit für die ungeschädigte Verbundzone erfolgen. Für einen Reibkoeffizienten von  $\mu = 0,15$  beispielsweise wären für den Anisotropiebeiwert Beträge bis ca.  $\lambda = 2,58$  zulässig, wobei nur Werte bis etwa  $\lambda = 2$  dem näherungsweise linearen Verlauf des Diagramms entsprechen und damit eine planmäßige Abminderung der maximalen Verbundnormalspannung erlauben. Das Diagramm zeigt außerdem die geringfügige Überschätzung der Verbundnormalspannung für gewählte Anisotropiebeiwert von  $\lambda < 1$  infolge der Verzerrung der Versagensfläche bei sehr großen Werten für den Reibkoeffizienten  $\mu$ . Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt bei Wahl üblicher Parametersätze eine nur geringe gegenseitige Beeinflussung der Modellparameter  $\mu$  und  $\lambda$  bei der Verzerrung der Versagensfläche, was eine hohe numerische Stabilität des Mehrflächenplastizitätsmodells erwarten lässt.

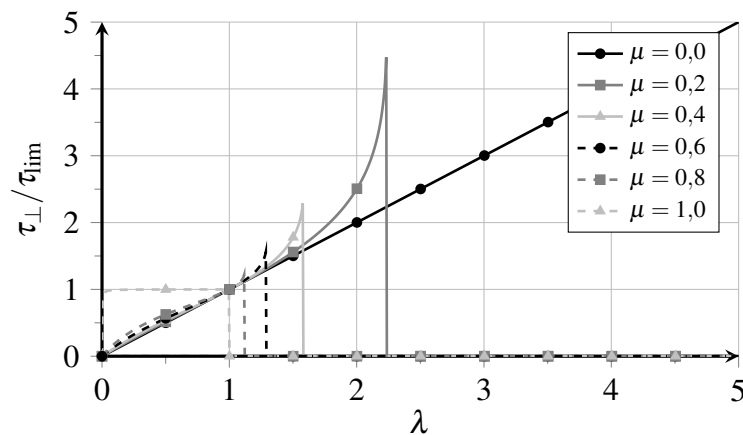


Abbildung 4.10: Rechnerische, bezogene Verbundnormalspannung in Abhängigkeit des Anisotropiebeiwertes  $\lambda$  mit Beeinflussung durch den Reibkoeffizienten  $\mu$

Für eine eindeutige Projektion der Spannungs-Deformations-Zustände aus dem Prädiktorschritt zurück auf die Versagensfläche ist die allseitige Konvexität der Versagensfläche erforderlich. ZIEGLER ET AL. fordern darüber hinaus die Eindeutigkeit der im gesamten Raum der Verformungsgeschwindigkeiten stetig definierten Dissipationsfunktion, was die Konvexität der Fließfläche impliziert [ZNW73]. Im Folgenden wird daher gezeigt, dass die Versagenskriterien im Übergangsbereich von positiven und negativen Verbundnormalspannungen identisch sind und damit ein stetiger und stetig differenzierbarer Übergang zwischen den Teilflächen gewährleistet ist. Außerdem wird anhand der Normalenvektoren auf den Teilflächen die Konvexität der zusammengesetzten Versagensfläche bewiesen.

Zunächst werden beide Versagenskriterien für den Rand ihres jeweiligen Definitionsbereiches mit  $\tau_{\perp} \rightarrow 0$  ausgewertet. Als zulässigen Spannungszustand auf der Versagensfläche im Übergangsbereich ergibt das Kriterium für den Querdruckbereich mit

$$\lim_{\tau_{\perp} \rightarrow 0^-} F_c = |\tau_{\parallel}| - \tau_{\text{lim}}(d) = 0 \quad (4.32)$$

eine ebene Verbundspannung  $\tau_{\parallel}$  genau in Höhe der aktuellen Verbundkapazität  $\tau_{\text{lim}}$ . Für das

Kriterium im Querkzugbereich folgt aus der Grenzwertbetrachtung

$$\lim_{\tau_{\perp} \rightarrow 0^+} F_t = \tau_{\parallel}^2 - \mu(d) \cdot \tau_{\text{lim}}^2(d) + (1 - \mu(d)) \cdot (-\tau_{\text{lim}}^2(d)) = \tau_{\parallel}^2 - \tau_{\text{lim}}^2(d) = 0 \quad (4.33)$$

derselbe Spannungspunkt auf der Versagensfläche. Der Übergang zwischen den Teilflächen ist also stetig.

Außerdem muss im Hinblick auf die geforderte Konvexität der zusammengesetzten Versagensfläche sichergestellt sein, dass für beliebige Parameterkonfigurationen die Teilfläche im Querkzugbereich im Übergangsbereich mindestens dieselbe Neigung wie die des Kegelstumpfes entsprechend dem Kriterium für den Querdruckbereich aufweist. Ein Knick zwischen den Teilflächen ist nur dann zulässig, wenn dabei die Konvexität der Fläche erhalten bleibt und damit eine eindeutige Bestimmung des Spannungszustandes auf der Versagensfläche möglich ist. Nähere Erläuterungen zur Lösung des nichtlinearen Anfangswertproblems im Rahmen des Punkt-Kollokations-Verfahrens mit iterativer Bestimmung des zulässigen Spannungszustandes auf der Versagensfläche werden im folgenden Kapitel gegeben.

Die Bestimmung des Normalenvektors auf den beiden Teilflächen am Rand des Definitionsbereiches mit  $\tau_{\perp} \rightarrow 0$  ermöglicht einen Vergleich der Neigungen im Übergangsbereich. Dazu werden zunächst die partiellen Ableitungen der Versagenskriterien nach den Spannungsanteilen  $\tau_{\parallel}$  und  $\tau_{\perp}$  aufgestellt und anschließend in einer Grenzwertbetrachtung ausgewertet. Der Normalenvektor auf der Teilfläche des Kriteriums für den Querdruckbereich lautet allgemein

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_c}{\partial \tau_{\parallel}} \\ \frac{\partial F_c}{\partial \tau_{\perp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_{\parallel}}{|\tau_{\parallel}|} \\ \mu(d) \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

und ist unabhängig von der Verbundnormalspannung, was eine Grenzwertbetrachtung überflüssig macht, während der Normalenvektor auf der Teilfläche im Querkzugbereich sich zu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_t}{\partial \tau_{\parallel}} \\ \frac{\partial F_t}{\partial \tau_{\perp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\tau_{\parallel} \\ \mu(d) \cdot 2(\tau_{\text{lim}}(d) - \tau_{\perp}) + (1 - \mu(d)) \cdot \frac{2\tau_{\perp}}{\lambda^2} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

ergibt. Für die Grenzwertbetrachtung wird die partielle Ableitung nach  $\tau_{\perp}$  an der Stelle  $\tau_{\perp} = 0$  ausgewertet, was den Normalenvektor auf der Teilfläche des Querkzugbereiches zu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_t}{\partial \tau_{\parallel}} \\ \frac{\partial F_t}{\partial \tau_{\perp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\tau_{\parallel} \\ \mu(d) \cdot 2\tau_{\text{lim}}(d) \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

vereinfacht. Eine Normierung dieses Vektors auf die Verbundkapazität  $\tau_{\text{lim}}$ , der die Verbundschubspannung  $\tau_{\parallel}$  im Übergangsbereich wie bereits in den Gleichungen (4.32) und (4.33) gezeigt betragsmäßig genau entspricht, führt mit

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_t}{\partial \tau_{\parallel}} \\ \frac{\partial F_t}{\partial \tau_{\perp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tau_{\parallel}}{\tau_{\text{lim}}(d)} \\ \mu(d) \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

auf denselben Normalenvektor wie für die Teilfläche des Querdruckbereiches. Damit ist auch die

Neigung der Teilflächen im Übergangsbereich identisch, d. h. die Teilflächen ergänzen einander ohne einen Knick an der Stelle  $\tau_{\perp} = 0$  und ergeben eine konvexe Versagensfläche.

In Abbildung 4.11 ist die Versagensfläche des Mehrflächenmodells mit den Kriterien (4.30) und (4.29) als zweidimensionaler Schnitt in Abhängigkeit der Degradation  $\psi$ , die die Auswirkungen der Verbundzonenschädigung  $d$  quantifiziert, schematisch dargestellt. Auf die Schädigungsmodellierung wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels näher eingegangen. Der Verlauf der dreidimensionalen Versagensfläche ist rotationssymmetrisch um die Achse der Normalenrichtung, da die Verbundschubspannung parallel zur Kontaktebene als Resultierende der beiden Koordinatenrichtungen in der Ebene ermittelt wird. Die Versagensfläche ist allseitig konvex und für beliebige Spannungs-Deformations-Zustände in der Verbundzone stetig und stetig differenzierbar.

Bei einer dreidimensionalen Anisotropie in der Oberflächenprofilierung der Fasern, etwa durch richtungsabhängiges Aufrauen der Oberfläche oder als Folge des Faserherstellungsprozesses, ist die Bestimmung von Vorzugsrichtungen oder einer richtungsabhängigen maximalen Verbundschubspannung sinnvoll. Dabei ist neben der Einführung richtungsabhängiger Verbundsteifigkeitsmodule in Gleichung (4.27) auch eine Anpassung der Versagenskriterien (4.29) und (4.30) hinsichtlich der Beanspruchbarkeit in Richtung der einzelnen Spannungsanteile erforderlich. Analog zur Unterscheidung von parallelen und senkrechten Verbundspannungen kann eine weitere Trennung und Abminderung von parallelen Verbundschubspannungen entgegen der Vorzugsrichtung in den Versagenskriterien eingeführt werden. Dadurch verliert die Versagensfläche des Verbundmodells ihre Rotationssymmetrie. Hinsichtlich des bisherigen Forschungsstandes auf Basis experimenteller Untersuchungen wird jedoch im Rahmen dieser Arbeit auf eine weitere Unterscheidung von Verbundschubspannungen verzichtet. Eine Verdrehung der Faser, d. h. eine Relativverschiebung in der Kontaktebene senkrecht zur Auszugsrichtung, ist bei einem geraden oder geneigten Faserauszug ohnehin nicht zu erwarten, vgl. z. B. [Lun05].

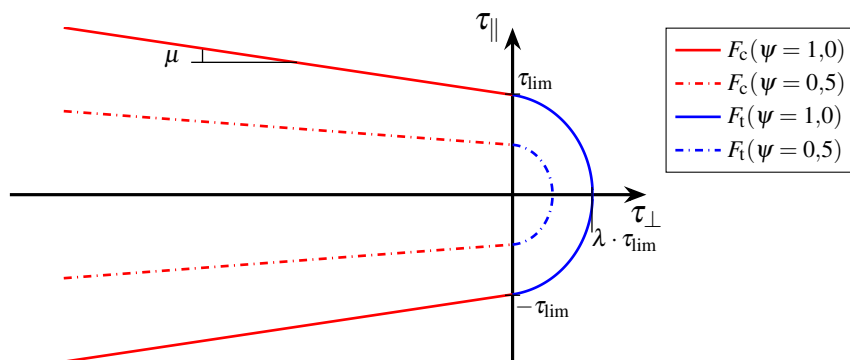


Abbildung 4.11: Versagensfläche in Abhängigkeit der Degradation  $\psi(d)$  für einen ungeschädigten ( $\psi = 1,0$ ) und einen geschädigten Zustand ( $\psi = 0,5$ ) als zweidimensionaler Schnitt in der  $\tau_{||}$ - $\tau_{\perp}$ -Ebene

Nach der Plastizitätstheorie sind Spannungs-Deformations-Zustände außerhalb der Versagensfläche nach Abbildung 4.11 nicht zulässig. Derartige Überbeanspruchungen werden durch das Generieren inelastischer Relativverschiebungen entsprechend einer Fließregel abgebaut. Aufgrund des stetigen, knickfreien Verlaufes der Versagensfläche im Übergangsbereich ist keine spezielle Formulierung der Fließregel bei verschwindenden Verbundnormalspannungen erforderlich. Je nach Vorzeichen der Verbundnormalspannungen ist nur ein Kriterium aktiv, sodass die

Fließregel sich zu

$$\dot{\delta}^{\text{in}} = \dot{\lambda}_c \cdot \frac{\partial Q_c}{\partial \tau} \quad \text{und} \quad \dot{\delta}^{\text{in}} = \dot{\lambda}_t \cdot \frac{\partial Q_t}{\partial \tau} \quad (4.38)$$

vereinfacht. Darin entsprechen die Proportionalitätsfaktoren  $\lambda_c$  und  $\lambda_t$  dem LAGRANGE-Multiplikator der nichtlinearen Optimierung, der mithilfe der Konsistenzbedingung  $\dot{F} = 0$  und den als KUHN-TUCKER-Bedingungen bekannten Einschränkungen, hier in allgemeiner Schreibweise,

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad F \leq 0, \quad \dot{\lambda} F \equiv 0 \quad (4.39)$$

definiert ist.

Bei auftretenden Querdruckspannungen muss zur Regulierung der Auswirkungen auf die Querdruckentwicklung eine nichtassoziierte Fließregel formuliert werden. Analog zum Verbundmodell von LUNDGREN erfolgt die Anpassung der Potenzialfunktion ausschließlich durch den Ersatz des Reibkoeffizienten  $\mu(d)$  durch einen betragsmäßig deutlich geringeren Querdruckentwicklungskoeffizienten  $\eta(d)$  zu

$$Q_c = |\tau_{\parallel}| + \eta(d) \cdot \tau_{\perp} - \tau_{\text{lim}}(d) \quad \text{mit } D = \{\tau_{\perp} \in \mathbb{R} \mid \tau_{\perp} < 0\} \quad (4.40)$$

[Lun05]. LUNDGREN wählt für eine realistischere Querdruckentwicklung infolge der Relativverschiebung bei geripptem Betonstahl eine Abminderung auf etwa 1/10, bei Simulationen mit zyklischen Einwirkungen auf etwa 1/100, des angesetzten Reibkoeffizienten [Lun05]. Anders als bei geripptem Betonstahl ist bei glattem Faser-Matrix-Verbund eine nur geringfügig ausgeprägte Querdruckentwicklung zu erwarten. Das Abscheren der Mikroverzahnung und das Lösen von Partikeln in der Verbundzone führen dabei zu einer Aufweitung der Verbundzone. Die Differenz zwischen der gewollten und der durch die steife Betonmatrix zulässigen Dilatanz resultiert in der Kontaktpressung. Komplexere Modellierungen der Dilatanzentwicklung in Analogie zu überkonsolidierten Böden unter Scherbeanspruchung sind ebenfalls möglich und wurden im Rahmen eines vereinfachten Verbundmodells angewendet, vgl. [LOE<sup>+</sup>19].

Analog dazu wird auch für die Potenzialfunktion für den Querkugbereich eine nichtassoziierte Fließregel definiert, in der ebenfalls der Reibkoeffizient  $\mu$  durch den Querdruckentwicklungskoeffizienten  $\eta$  ersetzt wird, sodass die Potenzialfunktion

$$Q_t = \tau_{\parallel}^2 - \eta(d) \cdot (\tau_{\text{lim}}(d) - \tau_{\perp})^2 + (1 - \eta(d)) \cdot \left( \left( \frac{\tau_{\perp}}{\lambda} \right)^2 - \tau_{\text{lim}}^2(d) \right) \quad (4.41)$$

mit  $D = \{\tau_{\perp} \in \mathbb{R} \mid \tau_{\perp} \geq 0\}$

lautet. Durch diese Modifikation ergibt sich im Übergangsbereich, d. h. bei verschwindenden Verbundnormalspannungen, für beide Kriterien dieselbe Fließregel, vgl. Gleichungen (4.34) und (4.37), wobei entsprechend dem Vorzeichen der Verbundnormalspannungen entweder der plastische Multiplikator  $\lambda_t$  für den Querkugbereich oder die entsprechende Variable  $\lambda_c$  für den Querdruckbereich anwächst. Die Diskretisierung und Zeitintegration dieser Materialgleichungen wird im folgenden Kapitel hinsichtlich der Lösung des physikalisch nichtlinearen Anfangswertproblems näher erläutert. Darin findet sich auch die Linearisierung dieser Funktionen wieder. Zunächst werden die werkstoffspezifischen Entwicklungsgleichungen für das Verbundmodell vorgestellt.

Die auftretenden Spannungen im Rahmen der dreidimensionalen Verbundwirkung werden für alle Spannungs-Deformations-Zustände durch einen infolge der beschriebenen Entwicklungsprozesse veränderlichen Grenzwert der Verbundkapazität kontrolliert. Die Verbundkapazität  $\tau_{\text{lim}}$  wird dabei entsprechend dem Entwicklungsprozess über die unterschiedlichen Verbundphasen abschnittsweise definiert und berücksichtigt die Degradation der Verbundzone. Die maximale Verbundkapazität  $\tau_{\text{max}}$  spiegelt den Verlauf der Verbundfestigkeitsentwicklung ohne Berücksichtigung der Degradation wider und ist abschnittsweise konstant oder linear.

Für die linear-elastische Phase des starren Verbundes (*engl.* rigid bond) wird die initiale Verbundfestigkeit  $f_r$  als konstanter Grenzwert gewählt. Analog dazu gilt im verschieblichen Verbund (*engl.* sliding bond) nach lokaler Ablösung der Kontaktflächen die Verbundfestigkeit  $f_s$  als Grenzwert der aufnehmbaren Verbundspannungen, der als Verbundkapazität  $\tau_{\text{lim}}$  in Verbindung mit der zunehmenden Degradation der Verbundzone abnimmt. Die Elastizitätsgrenze ist durch den Parameter  $s_c = f_r/E_r$  definiert. Für den Übergangsbereich des lokalen Debondings wird ein linearer Zusammenhang gewählt, der über einen als Modellparameter  $d_d$  bezeichneten Grenzwert der Schädigung im Rahmen des Ablösungsprozesses wird. Dieser Parameter ist bei experimentellen Untersuchungen mit ausreichend hoher Auflösung der Messdaten aus der Beziehung zwischen Auszugwiderstand und dem an der Faserspitze gemessenen Schlupf abschätzbar und kann gegebenenfalls auch zu null gesetzt werden. Nähere Informationen zur Bestimmung der Modellparameter sind Kapitel 6.2 zu entnehmen.

Mit Erreichen dieses Schädigungsbetrages  $d_d$  gilt die lokale Ablösung der Kontaktflächen als abgeschlossen und die Phase des verschieblichen Verbundes beginnt, vgl. Kapitel 3.1. Dabei setzt der Prozess des Debondings ein Schädigungswachstum voraus, da für  $d = 0$  die initiale Verbundfestigkeit als konstanter Grenzwert der Verbundkapazität gilt. Eine Entlastung der Verbundzone kann demzufolge den anfänglichen Adhäsionsverbund nicht wieder herstellen, sofern die Ablösung der Kontaktflächen eingesetzt hat. Diese irreversible Änderung der Verbundkapazität wird daher in Abhängigkeit der Schädigung modelliert. Die maximale Verbundkapazität  $\tau_{\text{max}}$  in Abhängigkeit der Verbundzonenschädigung  $d$  und ohne Berücksichtigung der Degradation kann damit als

$$\tau_{\text{max}}(d) = \begin{cases} f_r & \text{für } d \leq 0 \\ f_r - (f_r - f_s) \cdot \frac{d}{d_d} & \text{für } 0 < d \leq d_d \\ f_s & \text{für } d_d < d \end{cases} \quad (4.42)$$

definiert werden. Die folgende Abbildung 4.12 stellt schematisch die Entwicklung der maximalen Verbundfestigkeit in Abhängigkeit der aufgebrachten Relativverschiebung parallel zur Verbundebene dar. Deutlich zu erkennen ist die veränderte Verbundkapazität in den Phasen des starren und verschieblichen Verbundes sowie den Übergangsbereich zwischen diesen Phasen.

Die maximale Verbundkapazität  $\tau_{\text{max}}$  fasst die querdruckunabhängigen Verbundmechanismen Adhäsion, Mikroverzahnung und Mikro-Interlocking in Form einer Verbundfestigkeit zusammen. Eine detaillierte, mikrophysikalisch begründete Unterscheidung der einzelnen Anteile der Verbundfestigkeit nach den vorherrschenden Mechanismen ist für experimentelle Untersuchungen nicht ableitbar, da die querdruckunabhängigen Verbundmechanismen Adhäsion, Mikroverzahnung und Mikro-Interlocking nicht separat erfasst werden können. Theoretische und semiempirische Modellierungsansätze für die einzelnen Verbundmechanismen sind der Literatur zu entnehmen, vgl. z. B. [Ste13], [LOE<sup>+</sup>19]. Die Abbildung 4.12 zeigt beispielhaft weitere mögliche Entwicklungsverläufe der Verbundkapazität  $\tau_{\text{lim}}$ , die die Degradation in Abhängigkeit

der Verbundzonenschädigung entsprechend Abbildung 4.13 berücksichtigen. Der Modellparameter  $\alpha$  skaliert dabei das Schädigungswachstum und somit implizit die Auswirkungen der Degradation, vgl. Gleichung (4.48).

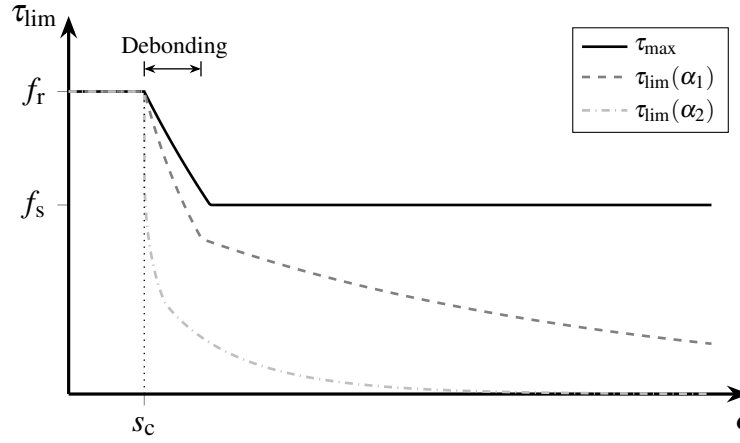


Abbildung 4.12: Entwicklung der Verbundkapazität  $\tau_{\max}$  und  $\tau_{\lim}$  mit Berücksichtigung der Degradation mit  $\alpha_1 < \alpha_2$  entsprechend den Verbundphasen

Mit dieser abschnittswiseen Definition der maximalen Verbundkapazität  $\tau_{\max}$  wird eine isotrope Entfestigung des Verbundmaterials infolge der Ablösung der Kontaktflächen voneinander induziert. Die Berücksichtigung des lokalen Degradationszustandes entlang der Verbundlänge ergibt die lokale Verbundkapazität  $\tau_{\lim}(d)$  in Abhängigkeit der entfestigenden Verbundzonenschädigung  $d$ . Entsprechend den Versagenskriterien (4.29) und (4.30) beeinflussen darüber hinaus auch querdruckabhängige Verbundmechanismen die ertragbare Verbundschubspannung. Eine schematische Darstellung des so definierten Verbundgesetzes ist in Abbildung 4.14 am Ende dieses Kapitels zu finden. Die Verbundkapazität ist durch die Berücksichtigung dieser verschiedenartigen Einflüsse im Allgemeinen über die Verbundlänge veränderlich. Auch durch die Wahl von streuenden Modellparametern kann die Verbundkapazität lokal modifiziert werden.

Da neben der Verbundkapazität  $\tau_{\lim}(d)$  aus der querdruckunabhängigen Verbundfestigkeit auch der Reibkoeffizient  $\mu(d)$  und der Querdruckentwicklungskoeffizient  $\eta(d)$  einer gleichartigen Degradation infolge der Verbundzonenschädigung unterliegen, erweist sich die Definition einer Degradationsfunktion  $\psi(d)$  in Abhängigkeit der Verbundzonenschädigung als zweckmäßig. So können die Verbundkapazität, der Reibkoeffizient und der Querdruckentwicklungskoeffizient im geschädigten Zustand als

$$\tau_{\lim}(d) = \tau_{\max}(d) \cdot \psi(d) \quad (4.43)$$

und

$$\mu(d) = \mu_{\max} \cdot \psi(d) \quad (4.44)$$

sowie

$$\eta(d) = \eta_{\max} \cdot \psi(d) \quad (4.45)$$

geschrieben werden. Eine schematische Darstellung der Verbundkapazität in Abhängigkeit der Degradation zeigt Abbildung 4.12. Die Degradationsfunktion  $\psi(d)$  reguliert die Auswirkungen eines Schädigungszustandes der Verbundzone hinsichtlich der Verbundwirkung. Mit zunehmender Verbundzonenschädigung  $d$  verringert sich der Betrag des Degradationsbeiwertes  $\psi$  als Abminderungsfaktor beginnend bei 1 in Richtung 0. Die einfachste Formulierung der Degradationsfunktion wäre ein linearer Zusammenhang, wie beispielsweise

$$\psi(d) = 1 - d. \quad (4.46)$$

Aber auch nichtlineare funktionelle Zusammenhänge zur Beschreibung des mikrophysikalischen Degradationsprozesses in der Verbundzone sind denkbar. Vergleichende Untersuchungen dazu werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels vorgestellt. Von wesentlicher Bedeutung ist dabei die Entwicklung der Schädigung selbst.

Der Zuwachs der Verbundzonenschädigung  $d$  wird durch inelastische Relativverschiebungen zwischen den Komponenten generiert. Weitere Einflussfaktoren, wie beispielsweise Temperaturänderungen oder Zwangsbeanspruchungen werden im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Weitere Schädigungsmechanismen sind vorstellbar, die einen Zuwachs der Verbundzonenschädigung infolge einer Kontaktpressung ohne Relativverschiebungen parallel zur Kontaktebene bewirken. Diese Schädigungsmechanismen werden insbesondere im Bereich von luft- und wassergefüllten Poren bei Betonstrukturen unter Druckbeanspruchungen beobachtet, vgl. z. B. [TO19]. Da in der Literatur wiederholt vom sehr dichten Gefüge der ITZ ohne eine lokal signifikant erhöhte Porosität berichtet wird, vgl. Kapitel 3.1, werden Schädigungseffekte dieser Art in der Verbundzone im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt.

Der Schädigungszustand der Verbundzone wird mit der dimensionslosen Variablen  $d$  beschrieben, die sich in Abhängigkeit der inelastischen Relativverschiebungsgeschwindigkeit parallel zur Kontaktebene  $\dot{\delta}_{\parallel}^{\text{in}}$ , normiert auf den Faserumfang  $u_f$ , richtungsunabhängig mit

$$\dot{d} = \beta(d) \cdot \frac{|\dot{\delta}_{\parallel}^{\text{in}}|}{u_f} \quad (4.47)$$

entwickelt. Darin reguliert die Funktion des Schädigungsentwicklungspotenzials  $\beta(d)$  den als nichtproportional erachteten Beitrag der Relativverschiebungen zum Schädigungszustand. Phänomenologisch betrachtet nimmt die Bedeutung von zusätzlichen Relativverschiebungen mit zunehmender Schädigung signifikant ab. Denn während zu Beginn des verschieblichen Verbundes beispielsweise die vorhandene Mikroverzahnung abgesichert und somit ein erheblicher Anteil des Verbundwiderstandes zerstört wird, bedeutet bei fein vermahlenden Partikeln im Faserkanal eine weitere Reibung und Abrasion der Kontaktoberflächen nur einen geringen Schädigungszuwachs. Eine reine Querkzugbeanspruchung führt nach dieser Definition (4.47) der Verbundzonenschädigung nicht zu einer Schädigung, bewirkt aber bei Überschreitung der Haftzugfestigkeit die irreversible Ablösung der Kontaktflächen. Diese Ablösung unter reinem Querkzug resultiert in einem abrupten Kontaktverlust. Eine Vernachlässigung von Relativverschiebungen in Normalenrichtung bei der Beschreibung der Schädigungsevolution ist damit phänomenologisch nachvollziehbar.

Mit Berücksichtigung eines konstanten Skalierungsfaktors  $\alpha$  zur verbundqualitätsabhängigen Be- oder Entschleunigung der Schädigungsentwicklung ist analog zur Beschreibung der Degradation (4.46) ein linearer Zusammenhang zwischen dem Schädigungsentwicklungspotenzial und der



Schädigung selbst mit

$$\beta(d) = \alpha \cdot (1 - d) \quad \text{mit } \alpha > 0 \quad (4.48)$$

denkbar. Während negative Werte für den Skalierungsfaktor nicht zulässig sind, wird für  $\alpha = 0$  die Entwicklung einer Verbundzonenschädigung und demzufolge einer Degradation unmöglich, was das Materialmodell unabhängig von einer Schädigungsformulierung macht. Die Schädigungsentwicklung bei zunehmender Relativverschiebung gleicht mit  $\alpha > 0$  der Funktion  $f(x) = x/(1+x)$ , welche mit einer exponentiell abnehmenden Steigung einen asymptotischen Verlauf gegen den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$  annimmt, vgl. Abbildung 4.13. Dieser Verlauf spiegelt einen kontinuierlichen, nichtproportionalen Schädigungszuwachs in der Verbundzone bei zunehmender Relativverschiebung parallel zur Kontaktebene wider.

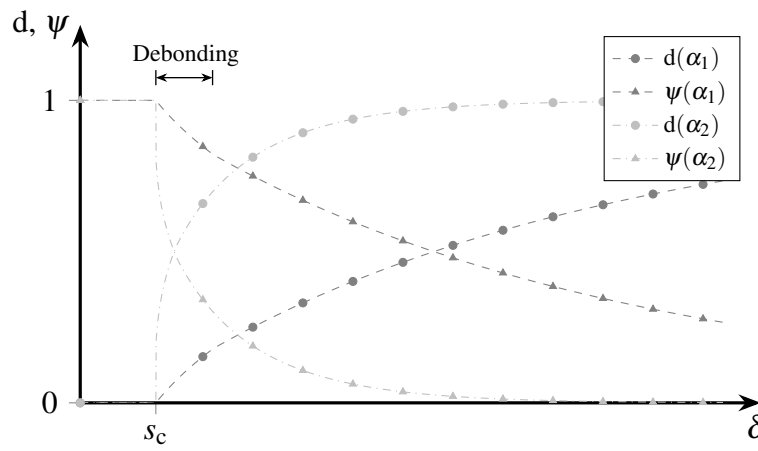


Abbildung 4.13: Entwicklung der Verbundzonenschädigung  $d$  und Degradation  $\psi$  über die Relativverschiebung parallel zur Kontaktebene mit  $\alpha_1 < \alpha_2$

Vorteilhaft bei dieser Formulierung der Schädigungsentwicklung ist die direkte Ermittlung des aktuellen Schädigungszustandes mit der aktuellen Relativverschiebungsgeschwindigkeit. Mithilfe der Entwicklungsgleichungen (4.47) und (4.48) ist eine Abschätzung des Schädigungsbetrages im Rahmen des Ablösungsprozesses möglich. Mit dem Ende der Ablösung erreicht die maximale Verbundkapazität  $\tau_{\max}(d)$  die Verbundfestigkeit  $f_s$  des verschieblichen Verbundes, die im Regelfall signifikant geringer ist als die initiale Verbundfestigkeit im starren Verbund. Durch die Berücksichtigung der Degradation wird diese Verbundkapazität jedoch im Allgemeinen unterschritten, vgl. Abbildung 4.12. Sofern beispielsweise in experimentellen Untersuchungen die inelastische Relativverschiebung  $s_d$  zum Ende des Debondings bekannt ist, kann mit einfachen Gleichungsumformungen der Entwicklungsgleichungen (4.47) und (4.48) mit

$$d_d = \frac{\alpha \cdot \frac{s_d}{u_f}}{1 + \alpha \cdot \frac{s_d}{u_f}} \quad (4.49)$$

der Schädigungsbetrag im Zuge des Debondings abgeschätzt werden. Als Eingangsparameter definiert dieser Schädigungsbetrag den Verlauf des Ablösungsprozesses, abgebildet in der Entwicklung der Verbundkapazität  $\tau_{\max}$  nach Gleichung (4.42) sowie  $\tau_{\lim}$  nach Gleichung (4.43).

Für die Berücksichtigung von Abweichungen von diesem gleichförmigen Verlauf etwa durch ein lokales Verkeilen von Partikeln ist anstelle des linearen Zusammenhanges zwischen dem Schädigungsentwicklungspotenzial und dem aktuellen Schädigungszustand eine nichtlineare oder gar abschnittsweise definierte Beziehung zu wählen. Außerdem wäre eine Abhängigkeit von der Verbundnormalspannung oder von der Relativverschiebung in Normalenrichtung vorstellbar, da bei hohem Querdruck eine größere Dissipationsenergie freigesetzt wird, als etwa bei in Normalenrichtung spannungslosem Kontakt oder gar bei Querkzug. Vergleichende numerische Untersuchungen zur Formulierung der Schädigungsentwicklung und zur Wahl des Skalierungsfaktors für verschiedene Verbundsituationen werden in weiteren Verlauf dieses Kapitels vorgestellt. Nach der Verifizierung der Funktionalität des entwickelten Verbundmodells am Ende dieses Kapitels, erfolgt in Kapitel 6.2 die Modellanpassung für die numerische Analyse von speziellen Faserauszugproblemen.

Im Zusammenspiel ergeben die Versagenskriterien und die Schädigungsformulierung dieses Materialmodells ein nichtlineares Verbundgesetz in Anlehnung an die linear-elastisch-abgetrept-ideal-plastische Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung, vgl. Abbildung 4.5. Dieses Verbundgesetz beschreibt das phänomenologische, lokale Verbundverhalten mit den Verbundphasen des starren und verschieblichen Verbundes sowie den wesentlichen Verbundmechanismen mit einfachen, parametrisierten Zusammenhängen. Der Einfluss des Spannungs-Deformations-Zustandes um die Verbundzone auf die dreidimensionale Verbundreaktion wird parameterreguliert erfasst und die Belastungs- und Deformationsgeschichte mithilfe von elastischen und inelastischen Verschiebungsanteilen und der Verbundzonenschädigung berücksichtigt. Nicht betrachtet wird im Rahmen dieser Arbeit die Bedeutung von zeitabhängigen Entwicklungsprozessen. Die folgende Abbildung 4.14 stellt schematisch den grundlegenden Verlauf des Verbundgesetzes über die Relativverschiebung exemplarisch für eine reine Schubbeanspruchung der Verbundzone dar.

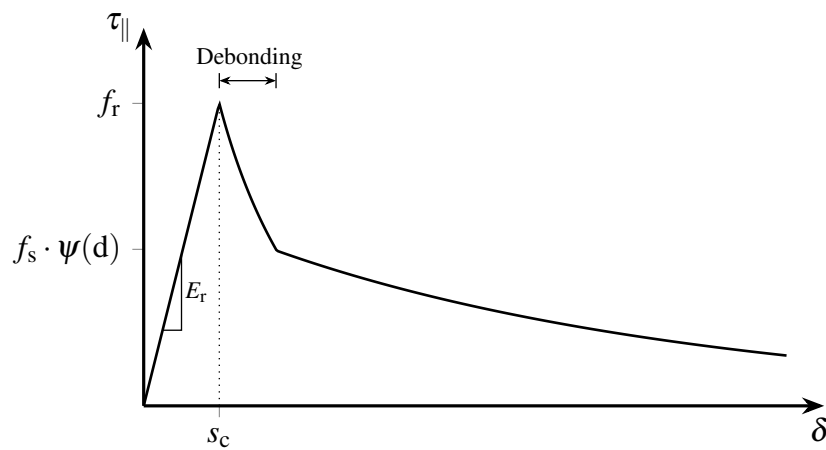


Abbildung 4.14: Verbundgesetz für das entwickelte Materialmodell als Schemazeichnung

Mit der Anpassung der Modellparameter erfolgt die Modifikation der grundlegenden Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung zu einem auf veränderliche äußere Einflüsse reagierenden, lokalen Verbundgesetz. Die zu wählenden Modellparameter sind

- der elastische Verbundsteifigkeitsmodul  $E_r = f_r/s_c$ ,
- die Verbundfestigkeit im starren Verbund  $f_r$ ,

- die Verbundfestigkeit im verschieblichen Verbund  $f_s$ ,
- der Anisotropiebeiwert  $\lambda$  zur Charakterisierung der zweidimensionalen Verbundzonenanisotropie,
- der elastische Schlupf bis zum Beginn der lokalen Ablösung  $s_c = f_r/E_r$ ,
- die Schädigung infolge des Debondingprozesses  $d_d$ ,
- der Reibkoeffizient  $\mu$  und der Querdruckentwicklungskoeffizient  $\eta$  sowie
- der positive Skalierungsfaktor  $\alpha$  zur verbundqualitätsabhängigen Be- und Entschleunigung der Schädigungsentwicklung.

Außerdem ist als geometrischer Modellparameter die Umfangslänge  $u_f$  der Faser für die Normierung des Schädigungsbeitrages infolge der inelastischen Relativverschiebung parallel zur Kontaktebene anzugeben.

#### 4.2.2 Zeitliche Diskretisierung und Integration der Materialgleichungen

Die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Materialgleichungen beschreiben das Verbundverhalten zwischen Faser und Matrix. Aufgrund der Unabhängigkeit der Entwicklungsfunktionen von der Zeit selbst, was durch die Vernachlässigung von Viskosität und zeitabhängigen Prozessen wie etwa Kriechen begründet ist, ist gleichermaßen auch eine differenzielle Formulierung der Modellgleichungen möglich [DK98]. Die Integration der Werkstoffgleichungen über diese nichtphysikalische Pseudozeit erlaubt eine inkrementelle Berechnung des Materialverhaltens.

Die Modellgleichungen für das Verbundverhalten werden allgemein als Anfangswertproblem erster Ordnung

$$\dot{z} = F(t, z(t)) \quad (4.50)$$

mit dem Anfangswert

$$z(t_i) = z_i \quad (4.51)$$

im Zeitintervall  $[t_i; t_{i+1}]$ , der als Endwert des vorangegangenen Intervalls  $[t_{i-1}; t_i]$  bekannt ist, formuliert [DK98]. Der Verlauf der zeitveränderlichen Zustandsgrößen  $z(t)$  ergibt sich durch die Lösung des Anfangswertproblems durch Integration im Zeitintervall als

$$z(t) = z_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{z} dt = z_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, z(t)) dt \quad (4.52)$$

[DK98]. Die numerischen Methoden zur Lösung der gewöhnlichen Differenzialgleichung (4.50) lassen sich entsprechend der Anzahl der benötigten bekannten Zeitschritte als Einschritt- oder Mehrschrittverfahren klassifizieren [DK98]. Dabei weisen Einschrittverfahren durch die Unabhängigkeit des zu berechnenden Zeitschrittes von vorangegangenen Zeitschritten den Vorteil auf, dass zur Verbesserung von Effizienz und Genauigkeit eine an definierte Bedingungen gekoppelte adaptive Schrittweitensteuerung verwendet werden kann. Häufig verwendete Zeitintegrationsverfahren gehören der Familie der RUNGE-KUTTA-Verfahren, z. B. das explizite EULER-CAUCHY-

Verfahren oder das implizite EULER-Rückwärts-Verfahren, oder der „Methode der gewichteten Residuen“, z. B. das Punkt-Kollokations-Verfahren oder das GALERKIN-Verfahren, an, vgl. z. B. [DK98], [Par03], [ZFT14].

Im Rahmen dieser Arbeit wird das implizite EULER-Verfahren verwendet, wobei der Verlauf der Zustandsgrößen näherungsweise durch die Tangente am Intervallende beschrieben wird, sodass das Integral

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} F(t, z(t)) dt = \Delta t \cdot F(t_{i+1}, z_{i+1}) + \varepsilon \quad (4.53)$$

mit der Intervalllänge

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i \quad (4.54)$$

und dem Approximationsfehler  $\varepsilon$  auf die inkrementelle Näherungslösung

$$\bar{z}_{i+1} = \bar{z}_i + \Delta t \cdot F(t_{i+1}, \bar{z}_{i+1}) \quad (4.55)$$

führt, die bereits einen näherungsweise ermittelten Anfangswert  $\bar{z}_i$  enthält [DK98]. Dieses Vorgehen entspricht einem Punkt-Kollokations-Verfahren mit linearen Zeitansätzen und der Kollokationsstelle  $\xi = 1$ , vgl. [DK98]. Der so entstandene inhärente Approximationsfehler akkumuliert sich über die Zeit zu einem globalen Verfahrensfehler, der mit kleiner werdenden Zeitschritten zunehmen kann [DK98].

Mit den beschriebenen impliziten Integrationsregeln muss das nichtlineare Gleichungssystem des Anfangswertproblems in jedem Zeitinkrement  $\Delta t$  gelöst werden. Im Zusammenhang mit der Plastizitätstheorie, die eine Aufteilung der Dehnungen in elastische und inelastische Dehnungsanteile vorsieht, wird häufig das Prädiktor-Korrektor-Verfahren (auch als radiale Rückkehrmethode (*engl.* radial return method) bekannt) eingesetzt, das eine effiziente Behandlung des Integrationsproblems in nur zwei Rechenschritten ermöglicht [Par03]. In einem ersten Prädiktorschritt wird ausgehend von einem ausiterierten Spannungs-Deformations-Zustand elastisches Materialverhalten angenommen und aus dem einem Zeitinkrement  $\Delta t$  zugeordneten Deformationsinkrement ein elastischer Testzustand (*engl.* trial state) ermittelt [Par03]. Die Überprüfung der Einhaltung definierter Fließkriterien leitet die gegebenenfalls notwendige Korrektur des Spannungs-Deformations-Zustandes ein. In einem zweiten Korrektorschritt wird der vorab geschätzte Spannungszustand zum Beispiel durch eine orthogonale Projektion des Spannungszustandes auf die Fließfläche (*engl.* closest-point-projection), wobei der Abstand zur Fließfläche minimiert wird, korrigiert [DK98], [Par03].

Für die Anwendung dieser Projektionsmethode ist die Konvexität der Fließfläche in jedem Punkt Voraussetzung [Par03]. Mithilfe der Fließregel wird die Projektionsrichtung an jedem beliebigen Prädiktorspannungspunkt außerhalb der Fließfläche ermittelt. Als Nebenbedingung wird dabei die Einhaltung der Fließbedingung nach dem Korrektorschritt gefordert [DK98].

Im Folgenden werden die Bilanzgleichungen und ihre Linearisierung zur iterativen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren in Residuumschreibweise für das entwickelte Materialmodell vorgestellt. Die Verschiebungsbilanz als erstes Residuum spiegelt die Aufteilung der elastischen und inelastischen Relativverschiebungsanteile

analog zu Gleichung (4.28) wider und wird innerhalb der Iteration wiederholt mit der Gleichung

$$r_\delta = \delta_{it} - \delta_{it}^{el} - \delta_{it}^{in} = 0 \quad (4.56)$$

bestimmt. Dabei ergeben sich die dreidimensionalen, elastischen Verschiebungsanteile  $\delta_{it}^{el}$  innerhalb der Iteration mithilfe des HOOKE'schen Gesetzes (4.27) aus der elastischen Nachgiebigkeit  $E_r^{-1}$  und den aktuellen Verbundspannungen  $\tau_{it}$  mit

$$\delta_{it}^{el} = E_r^{-1} \cdot \tau_{it}, \quad (4.57)$$

während die inelastischen Verschiebungsanteile entsprechend der verallgemeinerten Fließregel nach KOITER nach der Zeitintegration additiv zu

$$\delta_{it}^{in} = \delta_0^{in} + \Delta \delta_{it}^{in} = \delta_0^{in} + \Delta \lambda_{c,it} \cdot \frac{\partial Q_c}{\partial \tau_{it}} + \Delta \lambda_{t,it} \cdot \frac{\partial Q_t}{\partial \tau_{it}} \quad (4.58)$$

berechnet werden können. Die plastischen Multiplikatoren  $\lambda_c$  und  $\lambda_t$  betragen am Zeitschrittende

$$\lambda_c = \lambda_{0,c} + \Delta \lambda_c \quad \text{und} \quad \lambda_t = \lambda_{0,t} + \Delta \lambda_t \quad (4.59)$$

mit

$$\Delta \lambda_c = \dot{\lambda}_c \cdot \Delta t \quad \text{und} \quad \Delta \lambda_t = \dot{\lambda}_t \cdot \Delta t \quad (4.60)$$

für einen linearen Zeitansatz [Par03], [DK98]. Die Integration der Schädigungsentwicklungsgleichung (4.47) im Zeitintervall führt auf die inkrementelle Formulierung

$$d_{it} = d_0 + \Delta d_{it} \quad (4.61)$$

mit dem inkrementellen Schädigungszuwachs

$$\Delta d_{it} = \beta(d_{it}) \cdot \frac{|\Delta \delta_{||,it}^{in}|}{u_f} \quad (4.62)$$

infolge des absoluten inelastischen Verschiebungsinkrementes parallel zur Kontaktebene

$$|\Delta \delta_{||,it}^{in}| = \left| \Delta \lambda_{c,it} \cdot \frac{\partial Q_c}{\partial \tau_{||,it}} + \Delta \lambda_{t,it} \cdot \frac{\partial Q_t}{\partial \tau_{||,it}} \right| \quad (4.63)$$

entsprechend Gleichung (4.58). Die zweite Residuums Gleichung repräsentiert die Schädigungsentwicklung

$$r_d = d_{it} - d_0 - \Delta d_{it} = 0 \quad (4.64)$$

und ist zum Ende des Korrektorschrittes zu erfüllen.

Als weitere Residuen müssen die Versagenskriterien entsprechend der essenziellen Nebenbedingung im Korrektorschritt erfüllt werden. Bei Mehrflächenplastizität bietet sich die Ein- und Ausschaltung der aktiven Fließflächen mithilfe der Faktoren  $k_{F_t}$  und  $k_{F_c}$  an. Entsprechend den Definitionsbereichen der Kriterien (4.30) und (4.29) ist immer nur eine der beiden Fließflä-

chen aktiv, sodass der Übergangsbereich zwischen den Versagenskriterien bei verschwindender Verbundnormalspannung keine gesonderte Regelung erfordert.

Zusätzlich zur Einhaltung der aktiven Versagensbedingung muss der Zuwachs der plastischen Multiplikatoren  $\lambda_t$  und  $\lambda_c$  mithilfe der Faktoren kontrolliert werden, sodass bei deaktiviertem Versagenskriterium im Querdruck- oder -zugbereich kein Zuwachs des entsprechenden Multiplikators auftreten kann [Cra16]. Das Residuum für das Versagenskriterium im Querdruckbereich lautet somit

$$r_{F_c} = k_{F_c} \cdot F_c + (1 - k_{F_c}) \cdot \Delta \lambda_{c,it} = 0 \quad (4.65)$$

und analog dazu wird das Residuum für das Versagenskriterium im Querkugbereich als

$$r_{F_t} = k_{F_t} \cdot F_t + (1 - k_{F_t}) \cdot \Delta \lambda_{t,it} = 0 \quad (4.66)$$

formuliert.

Die Zustandsvariablen, die als Freiwerte innerhalb des iterativen Lösungsalgorithmus zu bestimmen sind, lauten zusammengefasst als Vektor  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}_{it} = [\boldsymbol{\tau}_{it}, \mathbf{d}_{it}, \lambda_{c,it}, \lambda_{t,it}]^T, \quad (4.67)$$

wobei  $\boldsymbol{\tau}_{it}$  die aktuelle dreidimensionale Verbundspannung in Vektorschreibweise getrennt nach den lokalen Koordinatenrichtungen in der Verbundzone beschreibt. Nach diesen Zustandsvariablen werden die Residuen für die konsistente Linearisierung des Gleichungssystems im aktuellen Zeitinkrement variiert. Die resultierende Tangentenmatrix ist quadratisch und beschreibt den Gradienten innerhalb des Produktalgorithmus auf Basis der Trennung des elastischen und des inelastischen Teilproblems [Par03].

Da die Aktualisierung der Zustandsvariablen eine Anpassung der Versagenskriterien (4.30) und (4.29) an den aktuellen Zustand des Materials erfordert, muss das linearisierte Gleichungssystem im Korrektorschritt

$$\mathbf{r} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{d}\mathbf{v} = 0 \quad (4.68)$$

iterativ gelöst werden, bis sowohl das Residuum  $\mathbf{r}$ , als auch die Änderung der Zustandsvariablen  $\mathbf{d}\mathbf{v}$  verschwinden. Im Rahmen dieser Arbeit wird das inkrementell-iterative NEWTON-RAPHSON-Verfahren verwendet, das sich gegenüber anderen Lösungsverfahren vor allem durch seine quadratische Konvergenz auszeichnet. Dabei ist es vergleichsweise rechenintensiv, da in jedem Iterationsschritt das Residuum und die konsistent linearisierte Materialtangente mit den aktualisierten Zustandsvariablen neu berechnet werden müssen.

Grundidee des Verfahrens ist die iterative Annäherung des nichtlinearen Zusammenhanges durch eine TAYLOR-Reihe unter Vernachlässigung von Reihengliedern zweiter und höherer Ordnung, wobei die Lösung eines Iterationsschrittes  $F(x_i)$  näherungsweise der Lösung des vorangegangenen Iterationsschrittes  $F(x_{i-1})$  zuzüglich einer linearen Abschätzung über die aktuelle Iterationsschrittlänge  $\Delta x_i$  mithilfe der Tangente an die Stelle der letzten bekannten Lösung entspricht, vgl. Abbildung 4.15. So kann die Näherungslösung für jeden Iterationsschritt

$i$  mit

$$F(x_i) = F(x_{i-1}) + \left( \frac{dF}{dx} \right)_{i-1} \cdot \Delta x_i \quad (4.69)$$

bestimmt werden. Die Anwendung dieses Näherungsverfahrens ist auf nichtlineare Zusammenhänge begrenzt, die in ihrem Verlauf stetig und stetig differenzierbar sind und deren Tangente eine Steigung  $\frac{dF}{dx} \neq 0$  aufweist.

Die Änderung der Zustandsvariablen  $\Delta \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1}$  je Iterationsschritt wird mithilfe der konsistenten Materialtangente an der Stelle des letzten Iterationsschrittes mit

$$\mathbf{K}(\mathbf{v}_{i-1}) = \frac{\partial \mathbf{v}_{i-1}}{\partial \mathbf{r}_{i-1}} \quad (4.70)$$

zu

$$\Delta \mathbf{v}_i = [\mathbf{K}(\mathbf{v}_{i-1})]^{-1} \cdot \mathbf{r}_{i-1} \quad (4.71)$$

berechnet. Die Genauigkeit der Näherungslösung  $\mathbf{v}_i$  wird mithilfe der Definition von Kriterien zur Sicherstellung der Konvergenz der Iteration gesteuert. Dafür wird im Rahmen dieser Arbeit das Abbruchkriterium

$$\left\| \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{v}} \right\|_2 < \varepsilon \quad (4.72)$$

definiert, das einen Absolutwert der euklidischen Norm über die aktuellen Änderung der Zustandsvariablen  $d\mathbf{v}$  bezogen auf ihren aktuellen Gesamtwert  $\mathbf{v}$  kleiner als den gesetzten Grenzwert  $\varepsilon = 10^{-8}$  fordert. Durch diese Normierung der inkrementellen Zustandsgrößen wird eine unterschiedliche Größenordnung der Zustandsvariablen berücksichtigt. Darüber hinaus wird eine maximale Iterationszahl von  $n_{\max} = 20$  definiert, die die Iteration innerhalb des in Abbildung 4.15 schematisch veranschaulichte NEWTON-RAPHSON-Verfahrens beendet, wenn diese kein konvergierendes Lösungsverhalten zeigt.

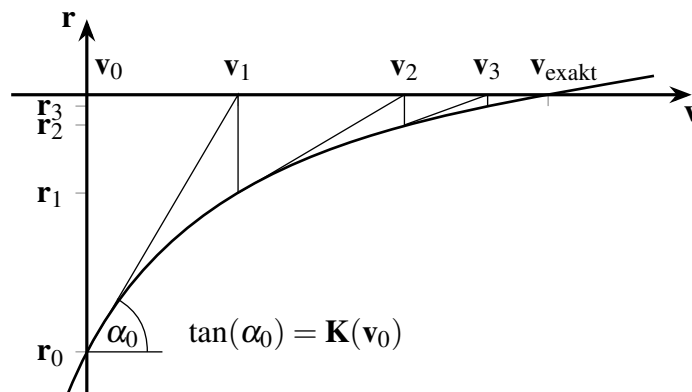


Abbildung 4.15: Schematische Darstellung des inkrementell-iterativen NEWTON-RAPHSON-Verfahrens für ein Zeit- beziehungsweise Lastinkrement

Zuzüglich zu dem inhärenten Verfahrensfehler als akkumulierten Approximationsfehler im Rahmen der lokalen Zeitintegration führt auch die zulässige Abweichung  $\varepsilon$  in der Genauigkeit

der Näherungslösung durch das Abbruchkriterium (4.72) des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens zu Diskrepanzen zwischen der exakten Lösung und der numerischen Näherungslösung.

Die konsistente Materialtangente wird in jedem Iterationsschritt auf Basis der aktuellen Zustandsvariablen nach Gleichung (4.68) vollständig neu berechnet, sodass sich das folgende linearisierte Gleichungssystem ergibt

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r_\delta}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} & \frac{\partial r_\delta}{\partial d_{it}} & \frac{\partial r_\delta}{\partial \lambda_{c,it}} & \frac{\partial r_\delta}{\partial \lambda_{t,it}} \\ \frac{\partial r_d}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} & \frac{\partial r_d}{\partial d_{it}} & \frac{\partial r_d}{\partial \lambda_{c,it}} & \frac{\partial r_d}{\partial \lambda_{t,it}} \\ \frac{\partial r_{F_c}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} & \frac{\partial r_{F_c}}{\partial d_{it}} & \frac{\partial r_{F_c}}{\partial \lambda_{c,it}} & \frac{\partial r_{F_c}}{\partial \lambda_{t,it}} \\ \frac{\partial r_{F_t}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} & \frac{\partial r_{F_t}}{\partial d_{it}} & \frac{\partial r_{F_t}}{\partial \lambda_{c,it}} & \frac{\partial r_{F_t}}{\partial \lambda_{t,it}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\tau}_{it} \\ \Delta d_{it} \\ \Delta \lambda_{c,it} \\ \Delta \lambda_{t,it} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_\delta \\ r_d \\ r_{F_c} \\ r_{F_t} \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

worin die inkrementellen Änderungen der Zustandsgrößen im Iterationsschritt unbekannt sind. Um mehrdimensionale Zustandsvariablen von eindimensionalen zu unterscheiden, werden vektorielle Ausdrücke, i. e. die Ableitungen nach den Verbundspannungen, durch das fett gedruckte  $\boldsymbol{\tau}_{it}$  angedeutet. Die Einordnung der partiellen Ableitungen in die Tangentenmatrix erfolgt entsprechend dem jeweiligen Residuum entweder als aufrechter oder liegender Vektor. Entsprechend der Formulierung der Versagenskriterien (4.29) und (4.30) wird im Folgenden die vereinfachende zweidimensionale Modellformulierung erläutert. Hinweise zur dreidimensionalen Formulierung folgen daran anschließend.

Die partielle Ableitung der Verschiebungsbilanz (4.56) nach den Verbundspannungen lautet

$$\frac{\partial r_\delta}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} = -\mathbf{F}^{el} - \left( \Delta \lambda_{c,it} \cdot \frac{\partial^2 Q_c}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}^2} + \Delta \lambda_{t,it} \cdot \frac{\partial^2 Q_t}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}^2} \right), \quad (4.74)$$

wobei  $\mathbf{F}^{el}$  die Nachgiebigkeitsmatrix als Inverse der Elastizitätsmatrix aus dem Prädiktorschritt ist. Während die zweite Ableitung der Potenzialfunktion  $Q_c$  nach (4.40) für den Querdruckbereich mit

$$\frac{\partial^2 Q_c}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}^2} = \mathbf{0} \quad (4.75)$$

verschwindet, ergibt sich für den Querkzugbereich gemäß der Potenzialfunktion  $Q_t$  nach (4.41) die partielle Ableitung nach den Verbundspannungen zu

$$\frac{\partial^2 Q_t}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}^2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\lambda^2} - 2 \cdot \eta(d_{it}) \cdot \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Da beide Potenzialfunktionen abhängig von der aktuellen Verbundzonenschädigung  $d_{it}$ , verbleibt als partielle Ableitung der Verschiebungsbilanz (4.56) nach der Verbundzonenschädigung das inelastische Verschiebungsinkrement, abgeleitet nach der Verbundzonenschädigung, sodass

$$\frac{\partial r_\delta}{\partial d_{it}} = - \left( \Delta \lambda_{c,it} \cdot \frac{\partial^2 Q_c}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it} \partial d_{it}} + \Delta \lambda_{t,it} \cdot \frac{\partial^2 Q_t}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it} \partial d_{it}} \right) \quad (4.77)$$



mit

$$\frac{\partial^2 Q_c}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it} \partial d_{it}} = \left[ 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial d_{it}} \right]^T \quad (4.78)$$

und

$$\frac{\partial^2 Q_t}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it} \partial d_{it}} = \left[ 0, \quad 2 \cdot \eta(d_{it}) \cdot \frac{\partial \tau_{lim}}{\partial d_{it}} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial d_{it}} \cdot \left( \tau_{lim}(d_{it}) - \tau_{\perp} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right) \right]^T \quad (4.79)$$

in die Tangentenmatrix eingeht. Dabei kann aufgrund der getrennten Formulierung der Residuen für die Versagenskriterien an dieser Stelle vernachlässigt werden, dass das inelastische Verschiebungsinkrement sich nur aus einem Anteil der additiven Fließregel nach (4.58) ergibt und somit nicht beide Anteile gleichzeitig als partielle Ableitung in der konsistenten Tangentenmatrix auftreten. Dieses exklusive Auftreten wird durch die Forderung, dass nur einer der plastischen Multiplikatoren  $\lambda_{c,it}$  und  $\lambda_{t,it}$  anwachsen kann, während der andere im gesamten Zeitschritt konstant bleibt, implizit sichergestellt.

Die materialspezifische partielle Ableitung des Querdruckentwicklungsbeiwertes  $\eta$  gemäß Gleichung (4.45) nach der Verbundzonenschädigung ist mit

$$\frac{\partial \eta}{\partial d_{it}} = \eta_{max} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial d_{it}} \quad (4.80)$$

definiert, wobei sich die Ableitung der Degradationsfunktion  $\psi(d)$  gemäß Gleichung (4.46) zu

$$\frac{\partial \psi}{\partial d_{it}} = -1 \quad (4.81)$$

ergibt. Die Verbundkapazität  $\tau_{lim}(d)$  nach Gleichung (4.43) wird in Analogie dazu bei Berücksichtigung der Kettenregel mit der Ableitung der Degradationsfunktion nach (4.81) zu

$$\frac{\partial \tau_{lim}}{\partial d_{it}} = \tau_{max}(d) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial d_{it}} + \frac{\partial \tau_{max}}{\partial d_{it}} \cdot \psi(d) \quad (4.82)$$

abgeleitet. Darin ist die Ableitung der maximalen Verbundkapazität nach der Verbundzonenschädigung

$$\frac{\partial \tau_{max}}{\partial d_{it}} = \begin{cases} 0 & \text{für } d \leq 0 \\ -(f_r - f_s) \cdot \frac{1}{d_d} & \text{für } 0 < d \leq d_d \\ 0 & \text{für } d_d < d \end{cases} \quad (4.83)$$

enthalten.

Analog dazu gehen ebenfalls die partiellen Ableitungen der Verschiebungsbilanz (4.56) mit additiver Fließregel gemäß (4.58) nach den plastischen Multiplikatoren in die Tangentenmatrix ein, sodass mit den Richtungen der Fließregel für den Querdruckbereich

$$\frac{\partial Q_c}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} = \left[ \frac{\tau_{||,it}}{|\tau_{||,it}|}, \quad \eta(d) \right]^T \quad (4.84)$$

und für den Querkzugbereich

$$\frac{\partial Q_t}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} = \left[ 2\tau_{\parallel}, \quad 2\frac{\tau_{\perp}}{\lambda^2} + 2 \cdot \eta(d_{it}) \cdot \left( \tau_{\text{lim}}(d_{it}) - \tau_{\perp} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right) \right]^T \quad (4.85)$$

die Ableitungen nach den plastischen Multiplikatoren im Querdruckbereich

$$\frac{\partial r_{\delta}}{\partial \lambda_{c,it}} = -\frac{\partial Q_c}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} \quad (4.86)$$

und im Querkzugbereich

$$\frac{\partial r_{\delta}}{\partial \lambda_{t,it}} = -\frac{\partial Q_t}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} \quad (4.87)$$

formuliert sind.

Die Entwicklung der Verbundzonenschädigung wird durch zusätzliche inelastische Verschiebungsinkremente parallel zur Kontaktebene gemäß Gleichung (4.62) mit (4.63) induziert. Demnach ist das zweite Residuum, i. e. die Schädigung nach Gleichung (4.64), neben der Abhängigkeit von der Verbundzonenschädigung selbst auch bestimmt durch den Spannungszustand und den Zuwachs der plastischen Multiplikatoren. Die partielle Ableitung der Schädigung (4.64) nach den Verbundspannungen kann mit additiver Zusammensetzung der Fließregel gemäß (4.58) formuliert werden, da der Zuwachs der plastischen Multiplikatoren nicht für beide Versagenskriterien zeitgleich erfolgen kann. In der Tangentenmatrix verschwindet daher einer der Summanden aus

$$\frac{\partial r_d}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} = -\beta(d_{it}) \cdot \frac{1}{u_f} \cdot \frac{\Delta \delta_{\parallel,it}^{\text{in}}}{|\Delta \delta_{\parallel,it}^{\text{in}}|} \cdot \left( \Delta \lambda_{c,it} \cdot \frac{\partial^2 Q_c}{\partial \tau_{\parallel,it} \partial \boldsymbol{\tau}_{it}} + \Delta \lambda_{t,it} \cdot \frac{\partial^2 Q_t}{\partial \tau_{\parallel,it} \partial \boldsymbol{\tau}_{it}} \right) \quad (4.88)$$

unter Berücksichtigung des entsprechenden Anteiles der zweiten partiellen Ableitung der Potenzialfunktionen  $Q_c$  nach Gleichung (4.40) und  $Q_t$  nach Gleichung (4.41) nach den Verbundspannungen, wie bereits mit den Gleichungen (4.75) und (4.76) angegeben. Zu beachten ist dabei, dass der Ausdruck  $(\Delta \delta_{\parallel,it}^{\text{in}}) / |\Delta \delta_{\parallel,it}^{\text{in}}|$  das Vorzeichen des inelastischen Schlupfes meint, welches im Allgemeinen dem Vorzeichen der inkrementellen Relativverschiebung im aktuellen Lastschritt entspricht. Zur Vermeidung von mathematisch ungültigen Aussagen kann insbesondere im ersten Iterationsschritt, wenn noch kein inelastisches Verschiebungsinkrement vorliegt, auf diese alternative Bestimmung des Vorzeichens zurückgegriffen werden.

Die partielle Ableitung der Schädigungsbilanz (4.64) nach der Verbundzonenschädigung selbst ergibt sich bei Anwendung der Kettenregel zu

$$\frac{\partial r_d}{\partial d_{it}} = 1 - \frac{1}{u_f} \left( \beta(d_{it}) \frac{\Delta \delta_{\parallel,it}^{\text{in}}}{|\Delta \delta_{\parallel,it}^{\text{in}}|} \left( \Delta \lambda_{c,it} \frac{\partial^2 Q_c}{\partial \tau_{\parallel,it} \partial d_{it}} + \Delta \lambda_{t,it} \frac{\partial^2 Q_t}{\partial \tau_{\parallel,it} \partial d_{it}} \right) + \frac{\partial \beta}{\partial d_{it}} |\Delta \delta_{\parallel,it}^{\text{in}}| \right) \quad (4.89)$$

mit den partiellen Ableitungen der Potenzialfunktionen wie in den Gleichungen (4.78) und (4.79) angegeben und dem inelastischen Verschiebungsinkrement nach (4.63). Die partielle Ableitung der Schädigungsentwicklungsfunktion (4.48) nach der Verbundzonenschädigung ist

für die einfache, lineare Formulierung des Zusammenhanges mit

$$\frac{\partial \beta}{\partial d_{it}} = -\alpha \quad (4.90)$$

gegeben.

Die partiellen Ableitungen der Schädigungsbilanz (4.64) nach den plastischen Multiplikatoren  $\lambda_{c,it}$  und  $\lambda_{t,it}$  folgen mit den Gleichungen

$$\frac{\partial r_d}{\partial \lambda_{c,it}} = -\beta(d_{it}) \cdot \frac{1}{u_f} \cdot \frac{\Delta \delta_{||,it}^{in}}{|\Delta \delta_{||,it}^{in}|} \cdot \frac{\partial Q_c}{\partial \tau_{||,it}} \quad (4.91)$$

für den Querdruckbereich und

$$\frac{\partial r_d}{\partial \lambda_{t,it}} = -\beta(d_{it}) \cdot \frac{1}{u_f} \cdot \frac{\Delta \delta_{||,it}^{in}}{|\Delta \delta_{||,it}^{in}|} \cdot \frac{\partial Q_t}{\partial \tau_{||,it}} \quad (4.92)$$

für den Querkugbereich, welche aufgrund des exklusiven Auftretens eines Zuwachses der plastischen Multiplikatoren zeitgleich in die Tangentenmatrix eingehen können.

Das Residuum (4.65) für das Versagenskriterium im Querkugbereich verwendet den Faktor  $k_{F_c}$ , der den inkrementellen Zuwachs des plastischen Multiplikators  $\lambda_{c,it}$  reguliert. In den partiellen Ableitungen des Residuums nach den Zustandsvariablen muss dieser Faktor berücksichtigt werden, sodass eine Beeinflussung der gesamten Zeile in der Tangentenmatrix erreicht wird. Die partielle Ableitung des Residuums nach den Verbundspannungen ergibt sich zu

$$\frac{\partial r_{F_c}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} = k_{F_c} \cdot \frac{\partial F_c}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} \quad (4.93)$$

und enthält die partielle Ableitung des Versagenskriteriums  $F_c$  gemäß (4.29) nach dem aktuellen Spannungszustand, welche dem Normalenvektor auf der Versagensfläche entspricht und bereits in Gleichung (4.34) angegeben ist.

Analog dazu enthält das Residuum (4.66) für das Versagenskriterium im Querkugbereich den Faktor  $k_{F_t}$ , welcher in der partiellen Ableitung des Residuums nach den Verbundspannungen

$$\frac{\partial r_{F_t}}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} = k_{F_t} \cdot \frac{\partial F_t}{\partial \boldsymbol{\tau}_{it}} \quad (4.94)$$

erhalten bleibt. Auch die hier benötigte Ableitung des Versagenskriteriums  $F_t$  gemäß (4.30) für den Querkugbereich stellt den Normalenvektor auf die Versagensfläche dar und ist mit Gleichung (4.35) bekannt.

Da beide Versagenskriterien auch von der Verbundzonenschädigung selbst abhängig sind, können sowohl die partielle Ableitung des dritten Residuums (4.65) nach der aktuellen Schädigung mit

$$\frac{\partial r_{F_c}}{\partial d_{it}} = k_{F_c} \cdot \frac{\partial F_c}{\partial d_{it}} \quad (4.95)$$

und die Ableitung des vierten Residuums (4.66) nach der aktuellen Schädigung mit

$$\frac{\partial r_{F_t}}{\partial d_{it}} = k_{F_t} \cdot \frac{\partial F_t}{\partial d_{it}} \quad (4.96)$$

bestimmt werden. Für den Querdruckbereich folgt die partielle Ableitung des Versagenskriteriums nach der Schädigung zu

$$\frac{\partial F_c}{\partial d_{it}} = \frac{\partial \mu}{\partial d_{it}} \cdot \tau_{\perp} - \frac{\partial \tau_{lim}}{\partial d_{it}}, \quad (4.97)$$

wobei die Ableitung des Reibkoeffizienten nach der Schädigung analog zu Gleichung (4.80) mit der Ableitung der Degradationsfunktion  $\psi(d)$  gemäß (4.81) zu

$$\frac{\partial \mu}{\partial d_{it}} = \mu_{max} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial d_{it}} \quad (4.98)$$

folgt und die Ableitung der Verbundkapazität in Gleichung (4.43) angegeben ist. Mit dieser Gleichung (4.98) kann die partielle Ableitung des Versagenskriteriums für den Querkzugbereich nach der Schädigung zu

$$\frac{\partial F_t}{\partial d_{it}} = \frac{\partial \tau_{lim}}{\partial d_{it}} \cdot (\mu(d_{it}) \cdot 2\tau_{\perp} - 2\tau_{lim}(d_{it})) + \frac{\partial \mu}{\partial d_{it}} \cdot \left( 2\tau_{lim}(d_{it})\tau_{\perp} - \tau_{\perp}^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right) \quad (4.99)$$

berechnet werden.

Als letzte Einträge in die Tangentenmatrix folgen die partiellen Ableitungen der Residuen für die Versagenskriterien nach den beiden plastischen Multiplikatoren  $\lambda_{c,it}$  und  $\lambda_{t,it}$ . Mit

$$\frac{\partial r_{F_c}}{\partial \lambda_{c,it}} = 1 - k_{F_c} \quad (4.100)$$

und

$$\frac{\partial r_{F_t}}{\partial \lambda_{t,it}} = 1 - k_{F_t} \quad (4.101)$$

wird das exklusive Anwachsen der Multiplikatoren sichergestellt, während die Ableitungen nach den jeweils nicht enthaltenen Multiplikatoren mit

$$\frac{\partial r_{F_c}}{\partial \lambda_{t,it}} = 0 \quad (4.102)$$

und

$$\frac{\partial r_{F_t}}{\partial \lambda_{c,it}} = 0 \quad (4.103)$$

verschwinden.

Anders als Mehrflächenplastizitätsmodelle mit zueinander geneigten Teilflächen wie beispielsweise das Betonmodell nach DRUCKER-PRAGER mit dem Hauptspannungskriterium nach RANKINE, dessen mehrstufige numerische Umsetzung mit additiver Fließregel im Übergangs-

bereich bei zwei aktivierten Versagenskriterien z. B. von CRAMER gezeigt wird, vgl. [Cra16], enthält dieses Materialmodell für den Verbund keine Neigungsänderung der Versagensfläche im Übergangsbereich. Der stetige Übergang zwischen den Teilflächen der einzelnen Versagenskriterien erfordert dennoch eine genaue Betrachtung der Rückprojektion von Spannungszuständen auf die Versagensfläche im Übergangsbereich. Da eine Rückprojektion der unzulässigen Testspannungszustände auf die geneigte Versagensfläche bei geringen Querkzugspannungen nicht mithilfe der Fließregel zum Versagenskriterium im Querkzugbereich erfolgen kann, führt die hier gewählte exklusive Aktivierung von nur einem Versagenskriterium unter Umständen zu Spannungszuständen, für die nicht beide Versagensbedingungen verschwinden. In diesem Fall ist nach Prüfung der Versagenskriterien eine zweite Chance für den Korrektorschritt vorgesehen, bei der für geringe Querkzugspannungen die Prüfung der Versagenskriterien die Aktivierung der Versagensfläche im Querdruckbereich ergibt. Erst der daraus zurück projizierte, zulässige Spannungszustand auf der Versagensfläche liegt dann geringfügig im Querdruckbereich. Die Definition der Versagensflächen entsprechend den Gleichungen (4.29) und (4.30) bleibt dabei unangetastet.

Im Folgenden wird zunächst auf das lokale Konvergenzverhalten sowie mögliche Modifikationen des Modells zur Verbesserung der Leistungsfähigkeit und Effizienz eingegangen. Anschließend wird die numerische Umsetzung im dreidimensionalen Spannungsraum gezeigt, bevor das Verhalten des Materialmodells hinsichtlich eines kontinuierlichen Zuwachses an Relativverschiebungen parallel zur Kontaktebene sowie hinsichtlich einzelner Be- und Entlastungsvorgänge an verschiedenen beispielhaften Parametersätzen gezeigt wird.

#### 4.2.3 Lokales Konvergenzverhalten

Der iterative Korrektorschritt erfolgt im Rahmen dieser Arbeit mit dem NEWTON-RAPHSON-Verfahren, dessen Konvergenzverhalten maßgeblich von Grad und Ausprägung der Nichtlinearität des Gleichungssystems abhängt. Da das entwickelte Materialmodell ein Mehrflächenplastizitätsmodell mit zwei unabhängigen Versagenskriterien darstellt, sind bei der Betrachtung des Konvergenzverhaltens die verschiedenen Bereiche des Modells zu unterscheiden. Diese sind

- der Querdruckbereich mit aktivem Versagenskriterium  $F_c$  und
- der Querkzugbereich mit aktivem Versagenskriterium  $F_t$ .

Im Übergangsbereich zwischen den Teilflächen des Modells ist, wie bereits im vorigen Kapitel erläutert, bei erfolgreicher Konvergenz im Querkzugbereich eines Zustandes, der jedoch nicht beide Versagenskriterien erfüllt, eine zweite Chance vorgesehen. Dabei erfolgt trotz positiver Verbundnormalspannung zu Beginn der Iteration die Rückprojektion des Spannungspunktes auf die Versagensfläche im Querdruckbereich. Das Konvergenzverhalten beider Berechnungsvorgänge entspricht dem Konvergenzverhalten der jeweiligen Modellbereiche.

Zur Visualisierung des Konvergenzverhaltens innerhalb des lokalen Iterationsverfahrens wird beispielhaft ein Parametersatz (VM1) für das Materialmodell der Verbundzone definiert, vgl. Tabelle 4.1. Als Ausgangszustand für einen neuen Spannungs-Deformations-Zustand wird ein elastischer Zustand ohne Degradation gewählt, da insbesondere mit einsetzender Schädigung eine signifikante, nichtlineare Verringerung der Verbundkapazität auftritt und das Konvergenzverhalten beeinflusst. Zum Vergleich wird in einer Variante (VM1\*) die Möglichkeit der Entwicklung einer Verbundzonenschädigung mit dem Parameter  $\alpha = 0$  eliminiert, sodass ausschließlich

das elasto-plastische Materialverhalten des Verbundmodells ohne die Schädigungs- und Entwicklungsprozesse des Debondings und der Degradation abgebildet wird. Als Startpunkt für die NEWTON-RAPHSON-Iteration wird ein unzulässiger Spannungs-Deformations-Zustand mit vergleichsweise großer Entfernung zur Versagensfläche gewählt. Im Folgenden werden die drei genannten Modellbereiche nacheinander untersucht.

Tabelle 4.1: Parametersatz VM1 für das Materialmodell der Verbundzone

Parameter	Symbol	Einheit	VM1
Verbundsteifigkeitsmodul	$E_r$	N/mm <sup>3</sup>	1 000,0
Verbundfestigkeit (starrer Verbund)	$f_r$	N/mm <sup>2</sup>	10,0
Verbundfestigkeit (versch. Verbund)	$f_s$	N/mm <sup>2</sup>	8,0
Anisotropiebeiwert ( $f_{\perp}/f_{\parallel}$ )	$\lambda$	—	0,8
Schädigung infolge Debonding	$d_d$	—	0,1
Reibkoeffizient	$\mu$	—	0,15
Querdruckentwicklungskoeffizient	$\eta$	—	0,001
Schädigungswachstumsfaktor	$\alpha$	—	0,5*
Faserumfangslänge <sup>+</sup>	$u_f$	mm	0,4 $\pi$

\* in Variante VM1\*:  $\alpha = 0$

<sup>+</sup> mit Faserdurchmesser  $d_f = 0,2$  mm

Das Materialmodell ist im Querdruckbereich durch ein im Hinblick auf die Abhängigkeit vom aktuellen Spannungszustand lineares Versagenskriterium und eine lineare Potenzialfunktion definiert, deren Ableitungen spannungsunabhängig und damit konstant sind. Bei Vernachlässigung der Schädigung entspricht die Näherungslösung des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens bereits im ersten Iterationsschritt, d. h. mit der ersten Rückprojektion des Spannungspunktes auf die Versagensfläche, dem endgültigen Spannungszustand. Ein zweiter Iterationsschritt bestätigt daraufhin das Ergebnis und erfüllt das Konvergenzkriterium (4.72), das als Abbruchkriterium die Iteration beendet.

Die Berücksichtigung der an die inelastische Relativverschiebung gekoppelten Verbundzonenschädigung erhöht die Anzahl benötigter Iterationsschritte dadurch, dass erst im zweiten Iterationsschritt eine Rückprojektion auf die infolge der Schädigung verkleinerte Versagensfläche erfolgen kann. Die Verbundzonenschädigung liefert mit der Abminderung der Verbundkapazität sowie der Materialparameter für die Reibung für das zu lösende Gleichungssystem eine zusätzliche, nichtlineare Abhängigkeit zwischen Spannungs- und Deformationszustand.

Die vorstehende Abbildung 4.16 zeigt das Konvergenzverhalten des Materialmodells für den Querdruckbereich sowohl ohne als auch mit Berücksichtigung der Verbundzonenschädigung. Dazu wird die im Rahmen des Konvergenzkriteriums (4.72) überprüfte euklidische Norm des Lösungsvektors  $\mathbf{dv}$  bezogen auf den Vektor der Zustandsgrößen  $\mathbf{v}$  als über die Anzahl der benötigten Iterationen im Korrektorschritt dargestellt, vgl. Abbildung 4.16, links. Zum Vergleich ist in Abbildung 4.16, rechts, der Verlauf der euklidischen Norm des Lösungsvektors  $\mathbf{dv}$  dargestellt. In beiden Diagrammen sind zur besseren Vergleichbarkeit des Konvergenzverhaltens die jeweilige Norm bezogen auf ihren maximalen Betrag dargestellt.

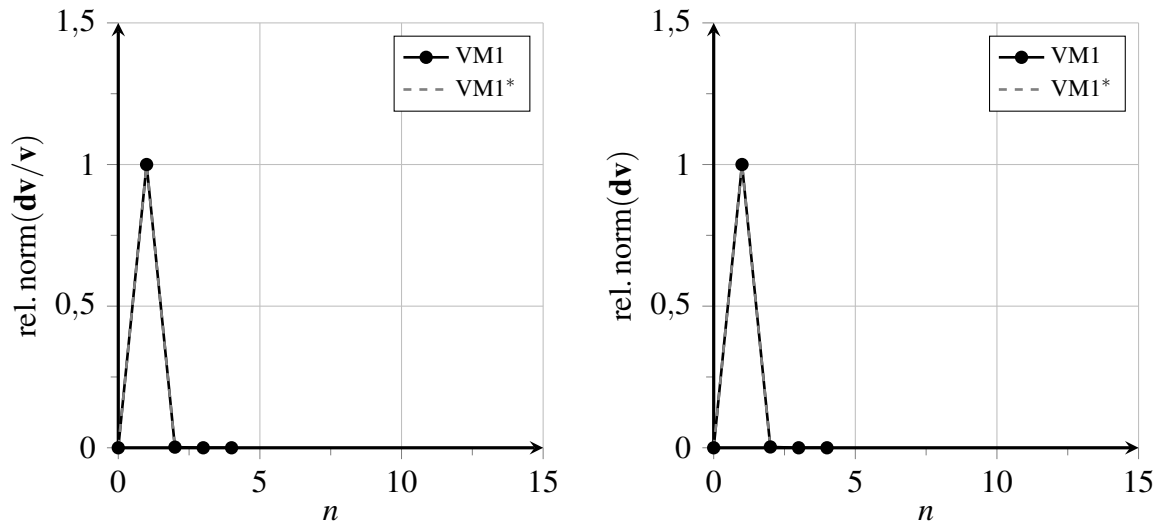


Abbildung 4.16: Lokales Konvergenzverhalten des Materialmodells im Querdruckbereich mit den Parametersätzen VM1 und VM1\*

Im Querzugbereich verläuft die Versagensfläche der nichtlinearen Versagensbedingung stark gekrümmt. Da die partiellen Ableitungen der Versagensbedingung sowie auch der Potenzialfunktion vom aktuellen Spannungszustand abhängen, ist eine Rückprojektion des unzulässigen Spannungspunktes genau auf die Versagensfläche im ersten Iterationsschritt nicht möglich. Stattdessen erfolgt eine schrittweise Annäherung des Spannungspunktes an den konvergierten Zustand. Dementsprechend benötigt die NEWTON-RAPHSON-Iteration im Querzugbereich erheblich mehr Iterationsschritte als im Querdruckbereich, konvergiert aber zuverlässig. Die folgende Abbildung 4.17 zeigt das Konvergenzverhalten des Materialmodells im Querzugbereich mit und ohne die Berücksichtigung der Verbundzonenschädigung in Analogie zu Abbildung 4.16.

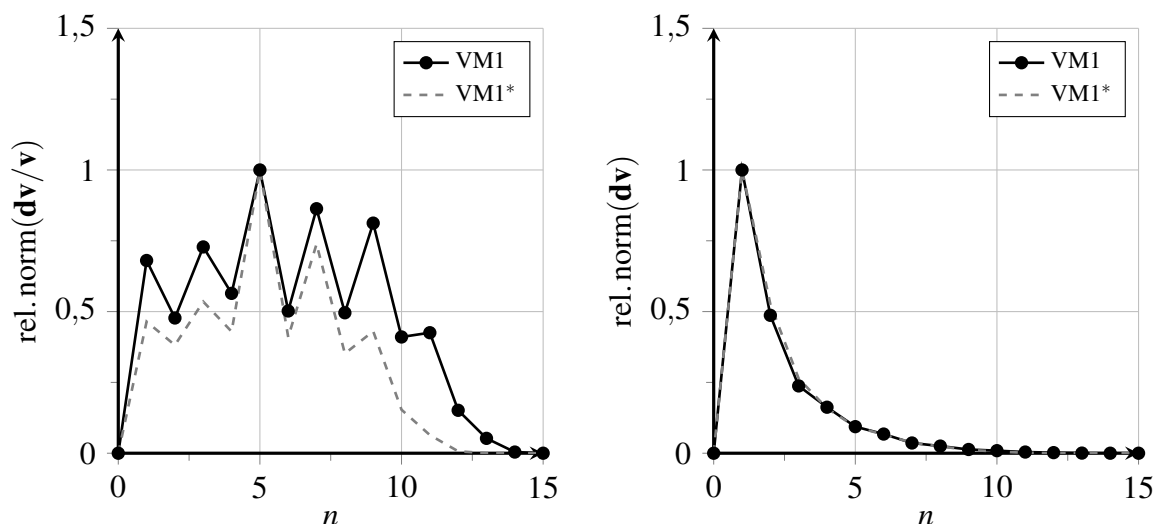


Abbildung 4.17: Lokales Konvergenzverhalten des Materialmodells im Querzugbereich mit den Parametersätzen VM1 und VM1\*

Der Einfluss der Schädigungsentwicklung auf das Konvergenzverhalten ist insgesamt von untergeordneter Bedeutung. Lediglich ein bis zwei zusätzliche Iterationsschritte werden im Vergleich

zur schädigungsfreien Iteration bis zum Erfüllen des Konvergenzkriteriums benötigt. Die Diagramme in den Abbildungen 4.16 und 4.17 zeigen außerdem keine signifikanten Abweichungen im Verlauf der Iteration. Deutlich wird hingegen in Abbildung 4.17 der Unterschied zwischen der nach Gleichung (4.72) gewählten Konvergenzabfrage und der Norm des Lösungsvektors  $\mathbf{d}\mathbf{v}$ . Die Größenordnung der einzelnen Zustandsvariablen unterscheidet sich offenbar signifikant, sodass eine Normierung der Inkremente auf ihre Gesamtwerte wie im gewählten Konvergenzkriterium (4.72) als sinnvoll erachtet wird. Dabei besteht allerdings die Gefahr, dass numerischen Ungenauigkeiten eine vergleichsweise hohe Bedeutung beigemessen wird, d. h. dass minimale Änderungen im Bereich der Nachkommastellen bei Beträgen um null die Konvergenz unter Umständen verhindern. Um dieser Problemstellung entgegenzuwirken, werden bei der wiederholten Berechnung der Tangentenmatrix alle Anteile aus numerischen Ungenauigkeiten eliminiert, die entsprechend der Deaktivierung eines Versagenskriteriums ohnehin verschwinden sollten. Insgesamt zeigt das entwickelte Materialmodell für die Verbundzone auch bei stark ausgeprägter Nichtlinearität und vergleichsweise großem Abstand zwischen Startwert und Endwert ein gutes Konvergenzverhalten.

#### 4.2.4 Numerische Umsetzung im dreidimensionalen Spannungsraum

Für die dreidimensionale Formulierung des Materialmodells der Verbundzone sind geringfügige Modifikationen an den Modellgleichungen vorzunehmen. Als lokale Koordinaten des Interface-Elementes werden zwei zueinander orthogonale Richtungen in der Ebene und eine dazu senkrechte Normalenrichtung definiert, vgl. Kapitel 5.2.

In diesem lokalen Koordinatensystem können die dreidimensionale Relativverschiebung in der Verbundzone als

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_s, \delta_t, \delta_n]^T \quad (4.104)$$

und analog dazu die Verbundspannung als

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_s, \tau_t, \tau_n]^T \quad (4.105)$$

angeschrieben werden. Sie sind entsprechend Gleichung (4.27) im elastischen Prädiktorschritt über die dreidimensionale, elastische Materialtangente  $\mathbf{C}^{\text{el}}$  mit

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}^{\text{el}} \cdot \boldsymbol{\delta} \quad (4.106)$$

verknüpft, wobei die Materialtangente mithilfe der Verbundsteifigkeit  $E_r$  im starren Verbund

$$\mathbf{C}^{\text{el}} = \begin{bmatrix} E_r & & \\ & E_r & \\ & & E_r \end{bmatrix} \quad (4.107)$$

ermittelt wird. Dabei sind im Bezug auf den Faserauszugversuch die tangentielle Umfangsrichtung  $s$  und Auszugsrichtung  $t$  als ebene, zueinander orthogonale Flächenkoordinatenrichtungen definiert, während die Dickenrichtung als normale Koordinatenrichtung ( $n = \perp$ ) bezeichnet wird und orthogonal zur Ebene und damit senkrecht zu den übrigen Koordinatenrichtungen definiert ist, vgl. Kapitel 5.2. Die Verbundschubspannung parallel zur Kontaktebene ergibt sich



als Resultierende der Spannungsanteile in beiden Koordinatenrichtungen der Ebene mit

$$|\tau_{||}| = \sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2} \quad (4.108)$$

und nimmt in dieser Schreibweise stets einen positiven Betrag an. Die Versagenskriterien (4.29) und (4.30) müssen daher anhand dieser Formulierung modifiziert werden sowie entsprechend die dazugehörigen Potenzialfunktionen und alle partiellen Ableitungen. Im Folgenden werden diejenigen Gleichungen aus dem vorangegangenen Kapitel erneut angegeben, für die sich durch die explizite Berechnung der Verbundschubspannungen Änderungen ergeben.

Das modifizierte Versagenskriterium für den Querdruckbereich, vgl. Gleichung (4.29),

$$F_c = \sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2} + \mu(d) \cdot \tau_n - \tau_{lim}(d) = 0 \quad \text{mit } D = \{\tau_n \in \mathbb{R} \mid \tau_n < 0\} \quad (4.109)$$

liefert als partielle Ableitung nach den Verbundspannungen

$$\frac{\partial F_c}{\partial \tau_{it}} = \left[ \frac{\tau_s}{\sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2}}, \frac{\tau_t}{\sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2}}, \mu(d) \right]^T, \quad (4.110)$$

vgl. Gleichung (4.34). Analog dazu ist auch die partielle Ableitung der Potenzialfunktion  $Q_c$  nach Gleichung (4.40), die in modifizierter Schreibweise als

$$Q_c = \sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2} + \eta(d) \cdot \tau_n - \tau_{lim}(d) \quad (4.111)$$

geschrieben wird, gegenüber der ursprünglichen Formulierung in Gleichung (4.84) nur leicht mit

$$\frac{\partial Q_c}{\partial \tau_{it}} = \left[ \frac{\tau_s}{\sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2}}, \frac{\tau_t}{\sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2}}, \eta(d) \right]^T \quad (4.112)$$

verändert.

Demgegenüber ergibt die zweite partielle Ableitung der Potenzialfunktion nach den Verbundspannungen aufgrund der Überführung in den dreidimensionalen Spannungsraum keine Nullmatrix mehr, sondern enthält mit

$$\frac{\partial^2 Q_c}{\partial \tau_{it}^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2}} - \frac{\tau_s^2}{(\tau_s^2 + \tau_t^2)^{3/2}} & -\frac{\tau_s \cdot \tau_t}{(\tau_s^2 + \tau_t^2)^{3/2}} & 0 \\ -\frac{\tau_s \cdot \tau_t}{(\tau_s^2 + \tau_t^2)^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{\tau_s^2 + \tau_t^2}} - \frac{\tau_t^2}{(\tau_s^2 + \tau_t^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

die partiellen Ableitung der Wurzelfunktion für die resultierende Verbundschubspannung. Die partielle Ableitung der Potenzialfunktion nach der aktuellen Verbundzonenschädigung wird nur um die dritte Koordinatenrichtung ergänzt, sodass weiterhin mit

$$\frac{\partial^2 Q_c}{\partial \tau_{it} \partial d_{it}} = \left[ 0, 0, \frac{\partial \eta}{\partial d_{it}} \right]^T \quad (4.114)$$

nur ein Eintrag in Normalenrichtung vorhanden ist.

Das modifizierte Versagenskriterium im Querkzugbereich, vgl. Gleichung (4.30) in der dreidimensionalen Formulierung

$$F_t = \tau_s^2 + \tau_t^2 - \mu(d) \cdot (\tau_{\text{lim}}(d) - \tau_n)^2 + (1 - \mu(d)) \cdot \left( \left( \frac{\tau_n}{\lambda} \right)^2 - \tau_{\text{lim}}^2(d) \right) = 0 \quad (4.115)$$

mit  $D = \{ \tau_n \in \mathbb{R} \mid \tau_n \geq 0 \}$

führt auf die partielle Ableitung nach den Verbundspannungen

$$\frac{\partial F_t}{\partial \boldsymbol{\tau}_{\text{it}}} = \left[ 2\tau_s, \quad 2\tau_t, \quad 2\frac{\tau_n}{\lambda^2} + 2\mu(d_{\text{it}}) \cdot \left( \tau_{\text{lim}}(d_{\text{it}}) - \tau_n \cdot \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right) \right]^T. \quad (4.116)$$

Analog dazu ist auch die Potenzialfunktion  $Q_t$  gegenüber der ursprünglichen Formulierung in (4.41) leicht verändert als

$$Q_t = \tau_s^2 + \tau_t^2 - \eta(d) \cdot (\tau_{\text{lim}}(d) - \tau_n)^2 + (1 - \eta(d)) \cdot \left( \left( \frac{\tau_n}{\lambda} \right)^2 - \tau_{\text{lim}}^2(d) \right) \quad (4.117)$$

anzugeben und zu

$$\frac{\partial Q_t}{\partial \boldsymbol{\tau}_{\text{it}}} = \left[ 2\tau_s, \quad 2\tau_t, \quad 2\frac{\tau_n}{\lambda^2} + 2\eta(d_{\text{it}}) \cdot \left( \tau_{\text{lim}}(d_{\text{it}}) - \tau_n \cdot \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right) \right]^T \quad (4.118)$$

und

$$\frac{\partial^2 Q_t}{\partial \boldsymbol{\tau}_{\text{it}}^2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\lambda^2} - 2\eta(d_{\text{it}}) \cdot \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \end{bmatrix} \quad (4.119)$$

partiell abzuleiten.

Die dreidimensionale Erweiterung der partiellen Ableitung der Potenzialfunktion nach den Verbundspannungen und der Verbundzonenschädigung lautet

$$\frac{\partial^2 Q_t}{\partial \boldsymbol{\tau}_{\text{it}} \partial d_{\text{it}}} = \left[ 0, \quad 0, \quad 2\eta(d_{\text{it}}) \cdot \frac{\partial \tau_{\text{lim}}}{\partial d_{\text{it}}} + 2\frac{\partial \eta}{\partial d_{\text{it}}} \cdot \left( \tau_{\text{lim}}(d_{\text{it}}) - \tau_n \cdot \left( 1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right) \right]^T. \quad (4.120)$$

Neben den Versagenskriterien muss auch die Schädigungsentwicklungsgleichung für die dreidimensionale Formulierung modifiziert werden. Analog zur Verbund Schubspannung nach (4.108) kann der resultierende Anteil der inelastischen Relativverschiebungen in der Kontaktebene ermittelt werden. Für die Schädigungsentwicklung von Interesse sind die inelastischen Verschiebungsinkremente parallel zur Kontaktfläche, die als resultierendes Verschiebungsinkrement

$$|\Delta \boldsymbol{\delta}_{\parallel, \text{it}}^{\text{in}}| = \sqrt{\left( \Delta \boldsymbol{\delta}_{s, \text{it}}^{\text{in}} \right)^2 + \left( \Delta \boldsymbol{\delta}_{t, \text{it}}^{\text{in}} \right)^2} \quad (4.121)$$

berechnet werden. Die Anteile der zusätzlichen inelastischen Relativverschiebung im aktuellen Zeitschritt werden dabei entsprechend den lokalen Koordinatenrichtungen des Interface-

Elementes mithilfe der Fließregel zu

$$\begin{bmatrix} \Delta \delta_{s,it}^{\text{in}} \\ \Delta \delta_{t,it}^{\text{in}} \\ \Delta \delta_{n,it}^{\text{in}} \end{bmatrix} = \Delta \lambda_{c,it} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_c}{\partial \tau_{s,it}} \\ \frac{\partial Q_c}{\partial \tau_{t,it}} \\ \frac{\partial Q_c}{\partial \tau_{n,it}} \end{bmatrix} + \Delta \lambda_{t,it} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_t}{\partial \tau_{s,it}} \\ \frac{\partial Q_t}{\partial \tau_{t,it}} \\ \frac{\partial Q_t}{\partial \tau_{n,it}} \end{bmatrix} \quad (4.122)$$

bestimmt. Mit der exklusiven Forderung im Rahmen der nichtlinearen Berechnung des Korrektorschrittes, dass nur jeweils eines der Versagenskriterien aktiv sein kann, vereinfacht sich die Bestimmung der inelastischen Verschiebungsinkremente zu

$$|\Delta \delta_{||,it}^{\text{in}}| = \Delta \lambda_{x,it} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{s,it}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{t,it}}\right)^2}, \quad (4.123)$$

wobei der Platzhalter  $x$  durch den Index des entsprechenden aktiven Versagenskriteriums zu ersetzen ist. Die modifizierte partielle Ableitung der Schädigungsbilanz (4.64) nach den Verbundspannungen für ein aktives Versagenskriterium lautet demnach

$$\frac{\partial r_d}{\partial \tau_{it}} = -\beta(d_{it}) \cdot \frac{1}{u_f} \cdot \Delta \lambda_{x,it} \cdot \frac{\frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{s,it}} \cdot \frac{\partial^2 Q_x}{\partial \tau_{s,it} \partial \tau_{it}} + \frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{t,it}} \cdot \frac{\partial^2 Q_x}{\partial \tau_{t,it} \partial \tau_{it}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{s,it}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{t,it}}\right)^2}} \quad (4.124)$$

und die partielle Ableitung nach der Verbundzonenschädigung wird durch die Modifikation zu

$$\frac{\partial r_d}{\partial d_{it}} = 1 - \frac{1}{u_f} \cdot \Delta \lambda_{x,it} \cdot \left( \beta(d_{it}) \frac{\frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{s,it}} \cdot \frac{\partial^2 Q_x}{\partial \tau_{s,it} \partial d_{it}} + \frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{t,it}} \cdot \frac{\partial^2 Q_x}{\partial \tau_{t,it} \partial d_{it}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{s,it}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{t,it}}\right)^2}} + \frac{\partial \beta}{\partial d_{it}} \sqrt{\left(\frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{s,it}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_x}{\partial \tau_{t,it}}\right)^2} \right). \quad (4.125)$$

Da der Zuwachs des plastischen Multiplikators  $\Delta \lambda_{c,it}$  oder  $\Delta \lambda_{t,it}$  im aktuellen Zeitschritt verschwindet, dann die beschriebene Formulierung der partiellen Ableitung additiv für beide Versagenskriterien zusammengefügt werden, ohne eine Interaktion der Anteile zu berücksichtigen, die bei konsequenter Ableitung der additiven Fließregel entstehen würde.

Analog zur ursprünglichen Formulierung der partiellen Ableitungen der Schädigungsbilanz nach den Multiplikatoren  $\lambda_{c,it}$  und  $\lambda_{t,it}$  gehen die modifizierten Ableitungen

$$\frac{\partial r_d}{\partial \lambda_{c,it}} = -\beta(d_{it}) \cdot \frac{1}{u_f} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial Q_c}{\partial \tau_{s,it}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_c}{\partial \tau_{t,it}}\right)^2} \quad (4.126)$$

und

$$\frac{\partial r_d}{\partial \lambda_{t,it}} = -\beta(d_{it}) \cdot \frac{1}{u_f} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial Q_t}{\partial \tau_{s,it}}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q_t}{\partial \tau_{t,it}}\right)^2} \quad (4.127)$$

dabei zeitgleich in die Tangentenmatrix ein.

Die Formulierung des Verbundzonenelementes, das diese Modifikationen des Materialmodells erfordert, wird in Kapitel 5 vorgestellt. Numerische Analysen des Faserauszugproblems mit der dreidimensionalen Finite-Elemente-Methode und dem entwickelten Materialmodell werden in Kapitel 6.2 ausgewertet.

## 4.3 Wesentliche Aspekte des modellierten Verbundverhaltens

Das entwickelte Materialmodell beschreibt das phänomenologische Verbundverhalten zwischen Faser und Matrix infolge von Relativverschiebungen. Dabei werden Entwicklungs- und Degradationsprozesse berücksichtigt, die sowohl durch die Verschiebungen selbst induziert als auch durch äußere Beanspruchungen der umgebenden Matrixstruktur hervorgerufen werden. Das komplexe Materialverhalten der Verbundzone wird im folgenden Kapitel anhand einer beispielhaft gewählten Konfiguration der Modellparameter veranschaulicht und im Bezug auf die in Kapitel 3 definierten Modellanforderungen verifiziert. Dabei wird auch auf die Interaktion der Verbundzone mit der umgebenden Matrixstruktur und auf die Verbundermüdung eingegangen. Darüber hinaus werden im Vergleich zur grundlegenden Variante der Schädigungsmodellierung in Kapitel 4.2 beispielhaft nichtlineare Funktionen zur Beschreibung der Schädigungs- und Degradationsentwicklung ausgewertet.

### 4.3.1 Verifikation des Materialmodells

Eine Verifikation des entwickelten Materialmodells anhand von experimentellen Untersuchungen oder analytischen Zusammenhängen über das Verbundverhalten zwischen Faser und Matrix ist entsprechend dem aktuellen Forschungsstand nicht möglich, vgl. Kapitel 3 und 4.1. Stattdessen erfolgt an dieser Stelle ein Vergleich des modellierten Materialverhaltens mit dem phänomenologisch erwarteten Verbundverhalten, das vorwiegend auf der Grundlage von Faserauszugversuchen evaluiert werden kann, vgl. Kapitel 3. Dabei werden neben der Entwicklung des lokalen Verbundwiderstandes insbesondere die interagierenden Verbundmechanismen und Schädigungsprozesse ausgewertet.

Die komplexe Kraftübertragung in der Verbundzone wird im Folgenden anhand des Beispielparametersatzes VM2 vorgestellt, der so konfiguriert ist, dass das elasto-plastische Materialverhalten, einschließlich der Schädigungs- und Degradationsentwicklung, über eine Relativverschiebung von insgesamt  $\delta_{||} = 10 \text{ mm}$  nachvollzogen werden kann. Die gewählten Modellparameter sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst.

Die inkrementelle Berechnung der Verbundreaktion infolge einer zunehmenden Relativverschiebung parallel zur Kontaktzone liefert die aus der Beanspruchung resultierende Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung für einen Materialpunkt. Integrale Auswertungen über eine räumlich ausge dehnte Verbundzone sind erst bei Anwendung dieses Materialmodells in einer Finite-Elemente-Analyse mit Interface-Elementen möglich, vgl. Kapitel 5 und 6. Für die folgenden Untersuchungen am Materialpunkt wird zunächst eine behinderte Querdehnung in der Verbundzone vorausgesetzt, d. h. dass keine Aufweitung der Verbundzone orthogonal zur Kontaktebene zulässig ist, sondern lediglich eine Parallelverschiebung der Oberflächen erfolgt. Als Bezugsgröße wird daher für die Darstellung der Entwicklungsprozesse die aufgegebene Relativverschiebung  $\delta_{||}$  entsprechend der zweidimensionalen Formulierung in Kapitel 4.2 gewählt.

Tabelle 4.2: Parametersatz VM2 für das Materialmodell der Verbundzone

Parameter	Symbol	Einheit	VM2
Verbundsteifigkeitsmodul	$E_r$	$\text{N/mm}^3$	100,0
Verbundfestigkeit (starrer Verbund)	$f_r$	$\text{N/mm}^2$	10,0
Verbundfestigkeit (versch. Verbund)	$f_s$	$\text{N/mm}^2$	8,0
Anisotropiebeiwert ( $f_{\perp}/f_{\parallel}$ )	$\lambda$	—	0,8
Schädigung infolge Debonding	$d_d$	—	0,05
Reibkoeffizient	$\mu$	—	0,15
Querdruckentwicklungskoeffizient	$\eta$	—	0,001
Schädigungswachstumsfaktor	$\alpha$	—	0,1
Faserumfang <sup>+</sup>	$u_f$	mm	$0,4\pi$

<sup>+</sup> mit Faserdurchmesser  $d_f = 0,2\text{ mm}$

Die folgende Abbildung 4.18 zeigt die Entwicklung der elastischen und inelastischen Anteile der Relativverschiebung parallel zur Kontaktebene. Bis zum Erreichen der Elastizitätsgrenze bei einer Gesamtverschiebung von  $\delta_{\parallel} = 0,1\text{ mm}$  ist eine lineare Zunahme der Verbundschubspannungen  $\tau_{\parallel}$  infolge der rein elastischen Relativverschiebung zu erwarten, vgl. Abbildung 4.19. Mit der lokalen Ablösung der verbundenen Oberflächen voneinander setzt die inelastische Deformation der Verbundzone ein. Neben zunehmenden inelastischen Anteilen der Relativverschiebung wird auch eine wachsende Verbundzonenschädigung generiert, die die Degradation der Verbundkapazität einleitet, vgl. Abbildungen 4.19 und 4.20.

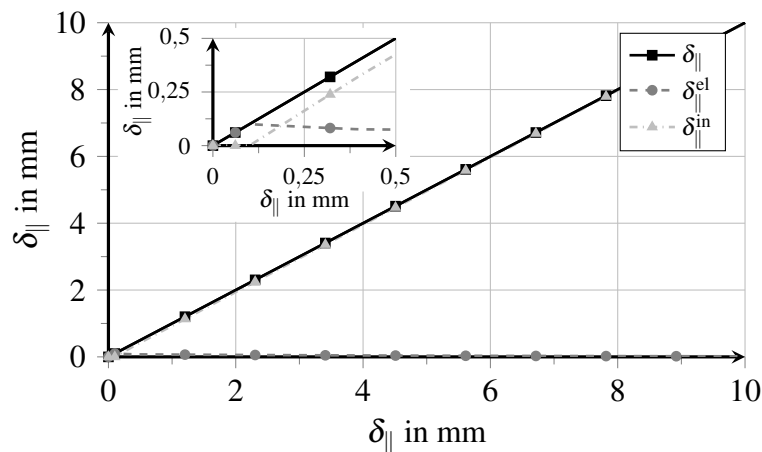


Abbildung 4.18: Elastische, inelastische und totale Relativverschiebung parallel zur Kontaktebene über die aufgebrauchte Verschiebung für Parametersatz VM2

Die Verbundkapazität, die die übertragbaren Verbundspannungen begrenzt, nimmt mit der einsetzenden Degradation zunächst rapide und nahezu linear auf einen Wert unterhalb der Verbundfestigkeit  $f_s = 8\text{ N/mm}^2$  des verschieblichen Verbundes ab, vgl. Tabelle 4.2. Anschließend wird mit zunehmenden Relativverschiebungen eine immer geringere Verbundschubspannung  $\tau_{\parallel}$  übertragen, vgl. Abbildung 4.19.

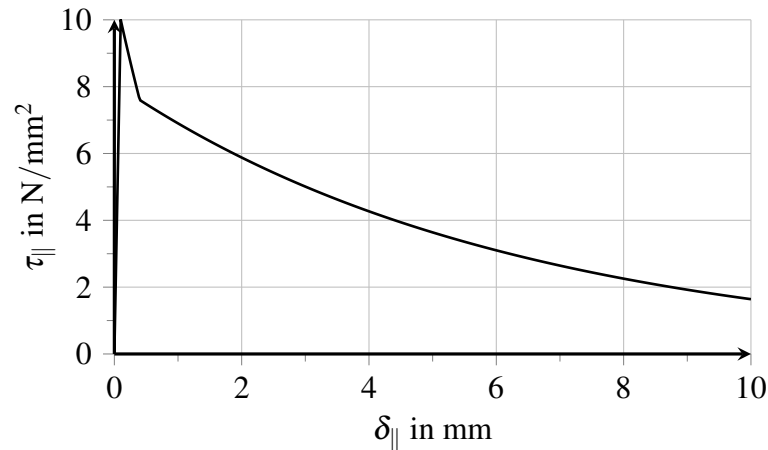


Abbildung 4.19: Verlauf der Verbundschubspannung in Abhängigkeit der aufgetragenen Relativverschiebung für Parametersatz VM2

Zeitgleich und proportional zur Entspannung der Verbundzone verringert sich auch der elastische Anteil der Relativverschiebung  $\delta_{||}$ . Die generierte Gesamtverschiebung ist schließlich überwiegend inelastisch und nur reversibel durch eine entgegengerichtete inelastische Verschiebung, die allerdings weitere Schädigungen hervorruft. Die Schubspannungsübertragung, die durch die Verbundkapazität begrenzt wird, ist abhängig von der Beteiligung der verschiedenen Verbundmechanismen, vgl. Kapitel 3.1. Insbesondere auftretender Querdruck in der Verbundzone beeinflusst signifikant die typische Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung nach Abbildung 4.14, die zusammenfassend den Einfluss der querdruckunabhängigen Verbundmechanismen in Verbindung mit der Schädigungs- und Degradationsentwicklung charakterisiert. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels erfolgt daher auch die Auswertung der Entwicklung von Verbundnormalspannungen  $\tau_{\perp}$ , dargestellt in Abbildung 4.23 sowie der dazu gehörigen Generierung von elastischen und inelastischen Relativverschiebungen  $\delta_{\perp}$  orthogonal zur Verbundzone in Abbildung 4.22.

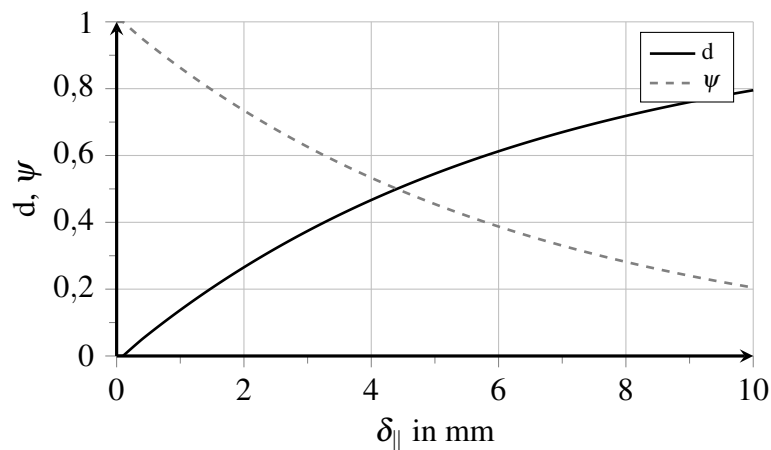


Abbildung 4.20: Entwicklung der Verbundzonenschädigung  $d$  und der Degradation  $\psi$  in Abhängigkeit der aufgetragenen Relativverschiebung für Parametersatz VM2

Die dimensionslose Verbundzonenschädigung  $d$  wächst infolge der aufgegebenen Relativverschiebung von insgesamt  $\delta_{||} = 10\text{ mm}$ , wie in Abbildung 4.20 dargestellt, kontinuierlich bis zu ihrem Maximalwert entsprechend der definierten Entwicklungsfunktion (4.47) und der hier

getroffenen Wahl der Modellparameter an, vgl. Tabelle 4.2. Der geschädigte Zustand der Verbundzone ist mit der Degradationsfunktion (4.46) in Abhängigkeit der Verbundzonenschädigung charakterisiert. Ebenfalls in Abbildung 4.20 dargestellt ist der Verlauf der dimensionslosen Degradationsgröße  $\psi$ , die in der Phase des verschieblichen Verbundes sowohl die Verbundkapazität  $\tau_{\text{lim}}$  infolge der querdruckunabhängigen Verbundmechanismen als auch mit dem Reibkoeffizienten  $\mu$  und dem Querdruckentwicklungskoeffizienten  $\eta$  die Wirkung einer Kontaktpressung herabsetzt, vgl. Gleichungen (4.43), (4.44) und (4.45). Weitere Varianten der Schädigungsmodellierung werden im Folgenden hinsichtlich ihrer Auswirkungen auf die Verbundreaktion diskutiert.

Die folgende Abbildung 4.21 zeigt die Entwicklung der plastischen Multiplikatoren  $\lambda_c$  und  $\lambda_t$  in Abhängigkeit der aufgetragenen Relativverschiebung. Auffällig ist, dass ausschließlich  $\lambda_c$  anwächst, während  $\lambda_t$  über die gesamte Einwirkung konstant gleich null ist. Demnach ist nur die Versagensbedingung im Querdruckbereich aktiv, mit der im Rahmen des Punkt-Kollokations-Verfahrens zulässige Spannungszustände infolge der Schubwirkung ermittelt werden. Erst mit der Betrachtung des phänomenologischen Verbundverhaltens ist als plausibel anzuerkennen, dass sich im Rahmen einer reinen Schubbewegung eine Kontaktpressung entwickelt, vgl. Kapitel 3.2. Die Ablösung der Kontaktflächen voneinander und die zunehmende Abrasion der Oberflächenstruktur führt zu einer gewollten Aufweitung der Verbundzone. Da diese Aufweitung im Rahmen dieses Beispiels jedoch verhindert ist, führen Partikelansammlungen im Verbundbereich zur Entwicklung einer Kontaktpressung.

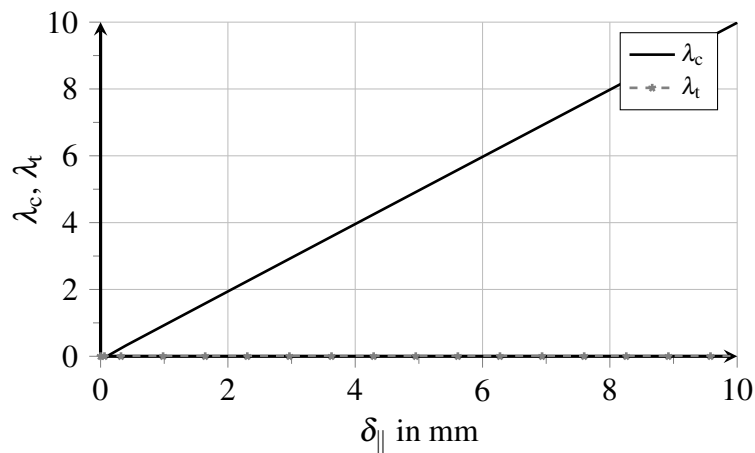


Abbildung 4.21: Entwicklung der plastischen Multiplikatoren beider Versagensbedingungen in Abhängigkeit der aufgetragenen Relativverschiebung für Parametersatz VM2

Auch die Berücksichtigung einer endlich dicken Matrixstruktur um die Verbundzone kommt entsprechend ihrer Nachgiebigkeit einer teilweisen Querdehnungsbehinderung gleich. Bei einer gering ausgeprägten Nachgiebigkeit kann es insbesondere zu Beginn der Schlupfentwicklung zu einer geringfügigen, zulässigen Aufweitung der Verbundzone kommen, was die Entwicklung von positiven Verbundnormalspannungen, i.e. Haftzugspannungen, zur Folge hätte, vgl. Kapitel 6.2. In diesem Beispiel entspricht die mit  $\delta_{\perp} = 0$  als starr angenommene Verbundzonendicke einer unnachgiebigen Querdehnungsbehinderung der Verbundzone. Im Bezug auf die mathematische Modellierung ist die Neigung der Versagensfläche beziehungsweise der Rückprojektion auf diese im dreidimensionalen Verbundspannungsraum, die durch den Modellparameter  $\mu$  in den Versagenskriterien (4.29) und (4.30) respektive  $\eta$  in den Potenzialfunktionen (4.40) und (4.41) charakterisiert ist, verantwortlich für die Entwicklung einer Kontaktpressung. Die Rückpro-

jektion von Spannungszuständen auf die Versagensfläche im Rahmen des Punkt-Kollokations-Verfahrens ist auch bei anfänglich verschwindender Verbundnormalspannung zugunsten einer Vergrößerung von  $\tau_{\perp}$  hin gerichtet und führt für  $\tau_{\perp} = 0$  nur bei Aktivierung des Versagenskriteriums im Querdruckbereich zu einem konvergierten, zulässigen Spannungszustand auf der zusammengesetzten Versagensfläche.

Die Rückprojektion von unzulässigen Testspannungszuständen auf die Versagensfläche im Punkt-Kollokations-Verfahren geht mit der Entwicklung von inelastischen Relativverschiebungen einher. Aufgrund der im dreidimensionalen Verbundspannungsraum geneigten Projektionsrichtung wird eine dreidimensionale inelastische Relativverschiebung generiert, d. h. auch die bereits erwähnte gewollte Aufweitung der Verbundzone orthogonal zur Kontaktebene. Die Behinderung dieser Aufweitung führt dabei zu einer elastischen Rückverformung der Verbundzone, die entsprechend Abbildung 4.23 auch in einer Verbundnormalspannung resultiert. In der folgenden Abbildung 4.22 sind die Entwicklungen der elastischen, inelastischen und totalen Relativverschiebung senkrecht zur Kontaktebene in Abhängigkeit der aufgetragenen Relativverschiebung parallel zu den verbundenen Oberflächen dargestellt, wobei die Gesamtverschiebung entsprechend der Vorgabe konstant Null ergibt. Die Entwicklung der elastischen und inelastischen Relativverschiebung  $\delta_{\perp}$  entspricht bei einer Parameterwahl von  $\eta = 0,001$ , vgl. Tabelle 4.2, nur einem Bruchteil der aufgegebenen Relativverschiebung  $\delta_{\parallel}$ . Die Wahl eines derart geringen Querdruckentwicklungskoeffizienten  $\eta$  ist phänomenologisch dadurch begründet, dass bei glatten Oberflächen ohne eine ausgeprägte Verzahnung der Oberflächenstrukturen nicht von der Bildung von Druckkegeln und Zugringen analog zum Verbundverhalten von Rippenstahl ausgegangen werden kann. Die verschiebungsinduzierte Querkraftentwicklung wird daher als eher gering eingeschätzt.

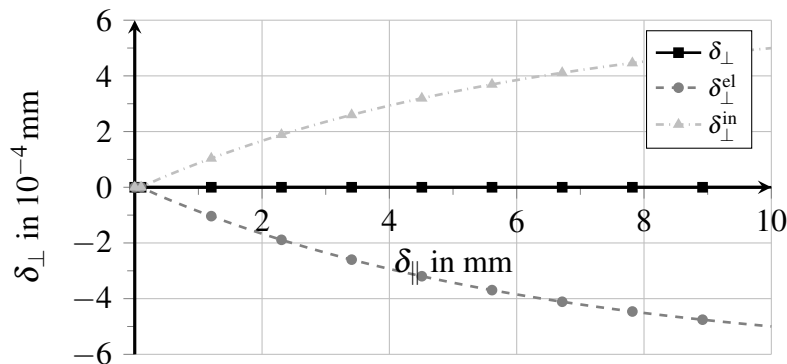


Abbildung 4.22: Elastische, inelastische und totale Relativverschiebung orthogonal zur Kontaktebene über die aufgetragene Relativverschiebung für Parametersatz VM2

In einer ebenfalls geringen Größenordnung werden infolge der elastischen Rückverformung, die die inelastischen Verformungen in Querrichtung ausgleicht, Verbundnormalspannungen erzeugt, vgl. Abbildung 4.23. Mit dem Proportionalitätsfaktor  $E_r$  ergeben sich aus den elastischen Relativverschiebungen daher die in Verlauf und Vorzeichen entsprechenden Verbundnormalspannungen. Der erwartete Einfluss auf die Verbundschubspannung durch die Aktivierung einer ausgeprägten Gleitreibung ist bei geringen Querdruckentwicklungskoeffizienten nicht signifikant.



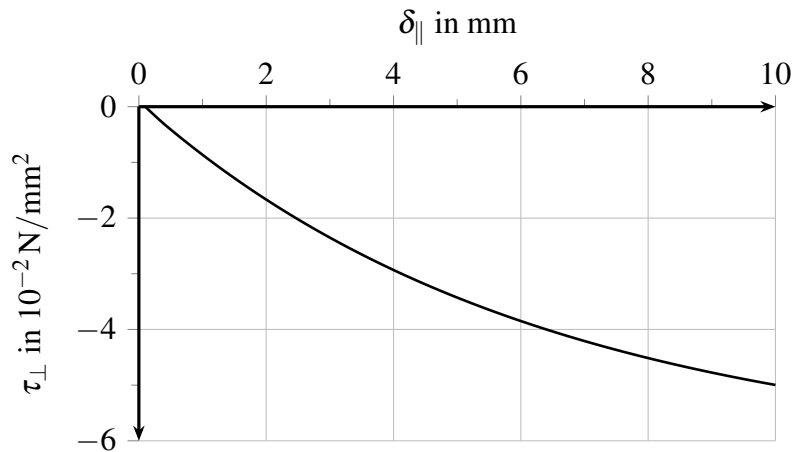


Abbildung 4.23: Verlauf der Verbundnormalspannung in Abhängigkeit der aufgetragenen Relativverschiebung für Parametersatz VM2

Aufbauend auf den hier erläuterten Untersuchungen mit einem beispielhaft gewählten Parametersatz gemäß Tabelle 4.2 werden in den folgenden Kapiteln spezifische Untersuchungen zum Einfluss der Verbundnormalspannungen, der Verbundzonenschädigung und zum Modellverhalten bei einer wiederkehrenden Be- und Entlastung vorgestellt. Mit den gezeigten Entwicklungsprozessen innerhalb des Materialmodells entspricht der Verlauf der lokalen Verbundschubspannungen in Abbildung 4.19 über die aufgetragene Relativverschiebung dem grundlegenden Verbundgesetz nach Abbildung 4.14. Einen maßgeblichen Einfluss auf die tatsächlich lokal auftretende Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung haben Spannungszustände in unmittelbarer Umgebung der Verbundzone, d. h. Querkzug- und Querkdruckspannungen in der Verbundzone.

#### 4.3.2 Interaktion des Materialmodells mit umgebenden Strukturen

Mit dem entwickelten Materialmodell wird die Verbundreaktion zwischen den in Kontakt stehenden Strukturen beschrieben. Maßgebend für die Bestimmung der übertragbaren Verbundspannungen ist die dreidimensionale Relativverschiebung zwischen den Oberflächen, die sich aus dem Zusammenspiel der Steifigkeiten der Komponenten und der Verbundzone ergibt. Beeinflusst wird der dreidimensionale Spannungs-Deformations-Zustand um die Verbundzone durch zeitabhängige und zeitunabhängige Beanspruchungen des Komposits, die sich in ihrer Ursache nach ein- und dreidimensionalen Effekten unterscheiden lassen, vgl. Kapitel 3.2. Die lokale Beeinflussung des Verbundwiderstandes, etwa durch Spannungsumlagerungen infolge von mikrostrukturellen Defekten, Inhomogenitäten oder in unmittelbarer Nähe kreuzenden Fasern, und eine Veränderung des Faserauszugverhaltens im Bezug auf den maßgebenden Versagensmechanismus sind die Effekte des Spannungs-Deformations-Zustandes um die Verbundzone. Im Folgenden werden zunächst die Auswirkungen der Interaktion mit den umgebenden Strukturen auf das Auszugverhalten diskutiert, bevor anhand der Beispielkonfiguration VM2 nach Tabelle 4.2 für eine Relativverschiebung von insgesamt  $\delta_{||} = 10$  mm die Beeinflussung des lokalen Verbundwiderstandes durch Verbundnormalspannungen ausgewertet wird.

Im entwickelten Materialmodell versagt die Verbundzone lokal bei vollendeter Schädigung ( $d = 1$ ) und Degradation ( $\psi = 0$ ), d. h. eine Verbundreaktion infolge von Relativverschiebungen kann für den vollständig geschädigten Zustand der Verbundzone nicht mehr ermittelt werden. Im Bezug auf das Faserauszugverhalten führt das lokale Versagen der Verbundzone zu einem schlagartigen,

nahezu widerstandslosen Auszug der Faser aus der Matrix, wenn der Auszugswiderstand infolge der verbleibenden Verbundreaktion geringer als die Beanspruchung ist. Ein ähnlich plötzliches Versagen kann sich auch durch einen großflächigen Kontaktverlust der Komponenten einstellen. Ursächlich dafür kann sowohl eine zu große Querkzugbeanspruchung sein als auch ein Versagen der Matrix infolge hoher Querdruckspannungen. Kegelförmige Ausbrüche der Matrix werden insbesondere bei schiefwinkeligem Faserauszug mit großen Umlenkkraften beobachtet und führen zu einer schlagartigen Reduktion der Verbundlänge, die häufig das Versagen des Faser-Matrix-Verbundes einleitet.

Wie bereits in Kapitel 4.2 erwähnt, wird die Beschreibung der Versagensmechanismen nicht der Modellierung des Materialverhaltens in der Verbundzone zugeordnet. Während das Versagen der Matrix mit einer entsprechenden Modellierung des Materialverhaltens abgebildet werden muss, vgl. Kapitel 6.1, ist die Feststellung von Kontakt der Strukturen durch das Geometriemodell zu realisieren, vgl. Kapitel 5.2. Das Geometriemodell liefert dabei nicht nur die Eingangsgrößen für die Bestimmung der Verbundreaktion, sondern lässt die Verbundsteifigkeit bei Kontaktverlust verschwinden. Das Geometriemodell ist daher maßgeblich an der Beschreibung der Interaktion zwischen Verbundzone und der umgebenden Struktur beteiligt. Weiterführende Details zum entwickelten Geometriemodell sind in Kapitel 5.2 zu finden.

Im vorangegangenen Kapitel ist das Verbundverhalten für eine geringe negative Verbundnormalspannung dargestellt, vgl. z. B. Abbildung 4.19. Die folgende Abbildung 4.24 zeigt im Vergleich dazu die Verbundschubspannung über eine Relativverschiebung von  $\delta_{\parallel} = 1$  mm einerseits für eine geringfügige Überdrückung der Verbundzone mit  $\delta_{\perp} = -0,1$  mm und andererseits für eine leichte Aufweitung von  $\delta_{\perp} = 0,1$  mm. Insbesondere im Bereich der maximal übertragbaren Verbundschubspannung sind deutlich Unterschiede zu erkennen. Während bei einer Überdrückung der Verbundzone eine Verbundschubspannung übertragen werden kann, die größer als die initiale Verbundfestigkeit ist, wird die Verbundfestigkeit bei Querkzug durch die kombinierte Beanspruchung erreicht, sodass insgesamt geringere Verbundschubspannungen übertragen werden können.

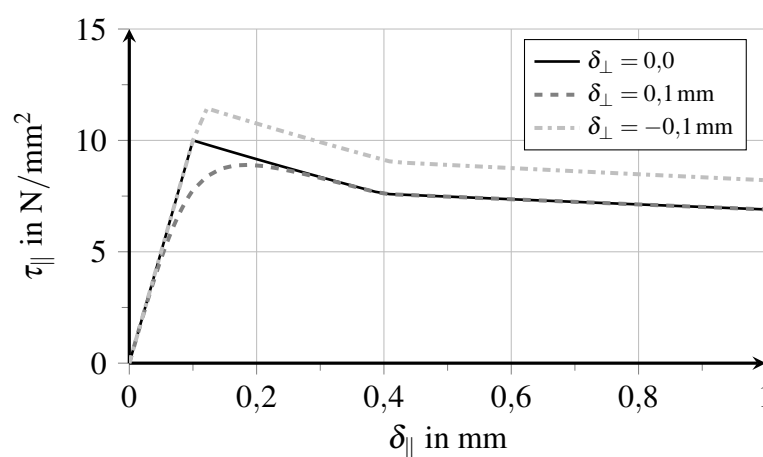


Abbildung 4.24: Verlauf der Verbundschubspannungen bei gleichzeitiger Überdrückung respektive Aufweitung der Verbundzone für Parametersatz VM2

Bei Überdrückung der Verbundzone wird die Verbundkapazität durch die zusätzlich aktivierten Verbundmechanismen Haft- und Gleitreibung vergrößert. Mit Erreichen des maximalen

Verbundwiderstandes werden sowohl inelastische Relativverschiebungsanteile als auch eine Verbundzonenschädigung generiert. Dabei ist das grundsätzliche Verbundverhalten mit einer Kontaktpressung äquivalent zum Verbundverhalten ohne äußerliche Überdrückung der Verbundzone, siehe Abbildungen 4.23 und 4.20. Die Differenz zwischen der Verbundschubspannung bei verschwindender Kontaktpressung und der Verbundschubspannung infolge der Überdrückung der Verbundzone entspricht dabei genau dem Anteil der querdruckabhängigen Verbundmechanismen und nimmt erwartungsgemäß durch die Degradation des Reibkoeffizienten im weiteren Verlauf der Relativverschiebung ab. In den folgenden Abbildungen 4.25 und 4.26 sind die Verbundnormalspannung und die Verbundzonenschädigung über eine Relativverschiebung von  $\delta_{||} = 1$  mm dargestellt.

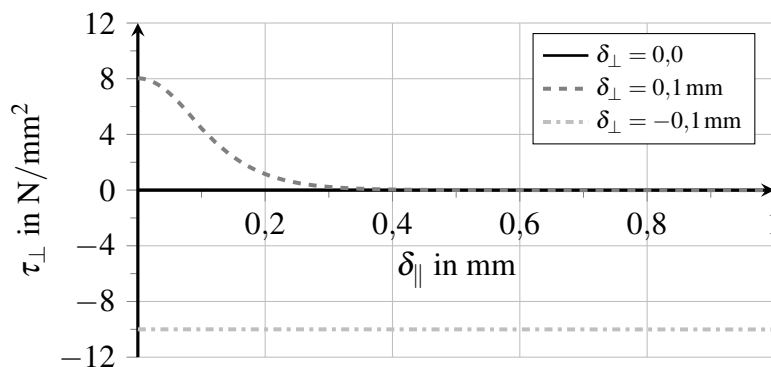


Abbildung 4.25: Verbundnormalspannung in Abhängigkeit der aufgetragenen Relativverschiebung für verschiedene Überdrückungszustände und Kontaktpressungen

Qualitativ anders verläuft die Verbundschubspannung bei gleichzeitig erzwungener Aufweitung der Verbundzone. Da in dieser Beispielkonfiguration entsprechend Tabelle 4.2 die ertragbare Verbundnormalspannung durch den Anisotropiewert  $\lambda = 0,8$  geringer ist als die Verbundfestigkeit  $f_r$ , werden von Beginn der Relativverschiebung an auch inelastische Verschiebungsanteile und eine Verbundzonenschädigung generiert. In Abbildung 4.26 ist das frühere Einsetzen der Schädigung deutlich zu erkennen.

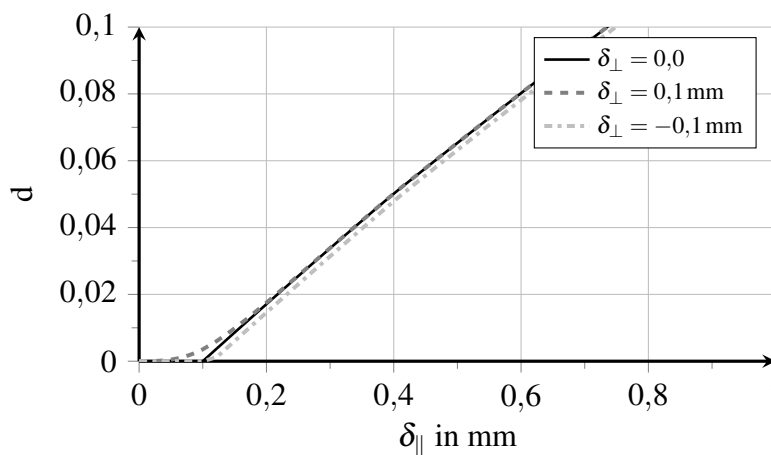


Abbildung 4.26: Verbundzonenschädigung in Abhängigkeit der aufgetragenen Relativverschiebung für verschiedene Kontaktpressungen

Darüber hinaus entspricht der Verlauf der Schädigungsentwicklung ab etwa  $\delta_{\parallel} = 0,3 \text{ mm}$  dem Schädigungsverlauf bei verschwindender Verbundnormalspannung. Die Ursache für diese Angleichung ist in der vorstehenden Abbildung 4.25 zu erkennen. Die anfänglich generierte Querspannung  $\tau_{\perp} = 8 \text{ N/mm}^2$  wird im Verlauf der ersten Zehntel Relativverschiebung abgebaut und mit der schubinduzierten Dilatanzentwicklung wird sogar eine geringe Querdruckspannung generiert, vgl. Abbildung 4.23. Dementsprechend verringert sich auch der elastische Anteil der Relativverschiebungen, während die erzwungene Aufweitung als inelastische Klaffung zuzüglich der Dilatanz verbleibt, vgl. Abbildung 4.22. Der nichtlineare Verlauf dieser Entspannung in Normalenrichtung folgt dabei anschaulich aus der mit zunehmender Relativverschiebung parallel zur Verbundzone ansteigende Neigungswinkel der Projektionsrichtung in der Fließregel.

Die Untersuchungen zeigen, dass die Verbundnormalspannung einen erheblichen Einfluss auf den lokalen Verbundwiderstand hat. Da entlang der Fasereinbindelänge unterschiedliche Spannungs-Deformations-Zustände vorherrschen, ist ein nichtlinearer Verlauf des Verbundwiderstandes entlang der Verbundlänge zu erwarten. Dabei kann auch die zulässige elastische Relativverschiebung bis zur Ablösung der Kontaktflächen voneinander erheblich variieren. Im entwickelten Materialmodell wird die Verbundreaktion ausschließlich infolge der Deformationen in der Verbundzone bestimmt. Darüber hinaus wäre eine Übertragung des allgemeinen Schädigungszustandes von angrenzenden Strukturelementen auf die Verbundzone denkbar. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch auf Rückkopplungen zwischen den Degradationszuständen von Strukturen und der Verbundzone verzichtet, da der Fokus der numerischen Untersuchungen auf dem Verbundverhalten im Faserauszugversuch liegt. Beeinträchtigungen der Fasertragwirkung im Verbundwerkstoff durch Beanspruchungen, die unabhängig von Relativverschiebungen in der Verbundzone auftreten, sind dabei nur von untergeordneter Bedeutung und werden in der Modellierung des Faserauszugverhaltens nicht berücksichtigt.

#### 4.3.3 Varianten der Schädigungsmodellierung

Im Rahmen dieser Arbeit umfasst die Schädigungsmodellierung einerseits die Beschreibung der Schädigungsentwicklung und andererseits die Beschreibung des Degradationsverhaltens als direkt gekoppelte Auswirkung der Schädigungszunahme auf die querdruckunabhängige Verbundkapazität  $\tau_{\text{lim}}$  sowie auf die Reibwirkung. Das entwickelte Materialmodell enthält daher die Funktion des Schädigungsentwicklungspotenzials  $\beta(d)$  nach Gleichung (4.48), die die Schädigungsevolution nach Gleichung (4.47) reguliert, und die Degradationsfunktion  $\psi(d)$  entsprechend Gleichung (4.46). Im Vergleich mit dem im Rahmen der Modellvorstellung vorgeschlagenen linearen Ansatz wird das entwickelte Materialmodell im Folgenden mit nichtlinearen Ansatzfunktionen für  $\beta(d)$  und  $\psi$  ausgewertet, um die Wirkungen aus der Schädigungsformulierung darzustellen. Darüber hinaus wird der Schädigungswachstumsfaktor  $\alpha$  mit einer linearen Schädigungsevolutionsfunktion variiert. Abschließend wird eine begründete Empfehlung für die Anwendung des Verbundmodells in der numerischen Analyse des Faserauszugverhaltens in Kapitel 6.2 gegeben.

Die Schädigungsmodellierung im Rahmen des Verbundmodells kann hinsichtlich der Qualität und Beschaffenheit der Verbundzone modifiziert werden. Dabei sind insbesondere eine Be- und Entschleunigung der Degradation im Bezug auf die Schädigungsentwicklung sowie der Schädigungsentwicklung infolge inelastischer Relativverschiebungen von Bedeutung. Neben der Wahl nichtlinearer Ansätze für die Entwicklungsfunktionen ermöglicht auch der Modellparameter  $\alpha$  eine Be- oder Entschleunigung der Schädigungsentwicklung. Im Rahmen dieser Arbeit

werden dabei keine mehrstufigen oder diskontinuierlichen Ansätze betrachtet. Ausgehend von der vorgestellten grundlegenden Formulierung mit linearen Ansätzen werden im Folgenden Modifikationen der Schädigungsmodellierung anhand der Beispielkonfiguration VM2 nach Tabelle 4.2 für eine Relativverschiebung von insgesamt  $\delta_{||} = 10\text{ mm}$  untersucht. Diese Modifikationen sind die Berücksichtigung

- einer nichtlinearen Degradationsfunktion  $\psi(d)$ ,
- einer nichtlinearen Funktion des Schädigungsentwicklungspotenzials  $\beta(d)$ ,
- einer nichtlinearen Degradationsfunktion  $\psi(d)$  und nichtlinearen Funktion des Schädigungsentwicklungspotenzials  $\beta(d)$  sowie
- eines vergrößerten Schädigungswachstumsfaktors  $\alpha$ .

Als Kriterien für die Wahl einer geeigneten nichtlinearen Funktion sollten neben der gewünschten phänomenologischen Wirkung auch die numerische Stabilität im iterativen Lösungsalgorithmus einbezogen werden. In der folgenden Abbildung 4.27 sind beispielhaft einige nichtlineare Funktionsverläufe im Vergleich zur linearen Formulierung im Anwendungsbereich  $x \in [0; 1]$  und  $f(x) \in [0; 1]$  entsprechend den üblichen Definitionsbereichen von Verbundzonenschädigung und Degradation dargestellt.

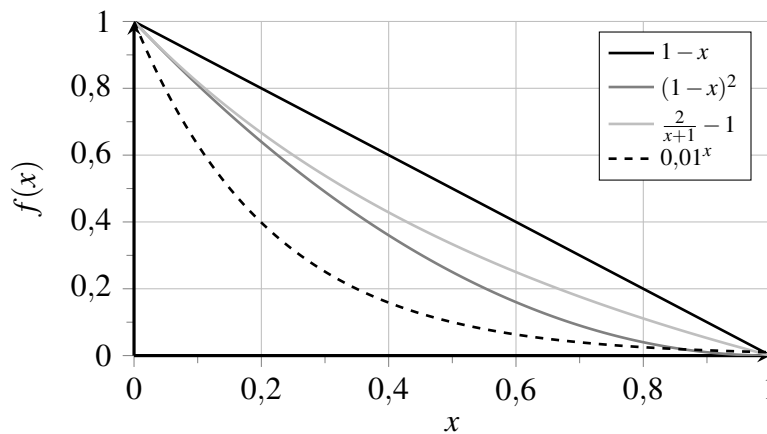


Abbildung 4.27: Beispiele nichtlinearer Funktionsverläufe für die Schädigungsmodellierung

Für die folgenden Auswertungen wird der quadratische Ansatz  $f(x) = (1 - x)^2$  gewählt, sodass die modifizierte Degradationsfunktion

$$\psi_{\text{mod}}(d) = (1 - d)^2 \quad (4.128)$$

eine zunächst stärker zunehmende Degradation beschreibt und die Schädigungsentwicklung mit dem modifizierten Schädigungsentwicklungspotenzial

$$\beta_{\text{mod}}(d) = \alpha \cdot (1 - d)^2 \quad (4.129)$$

insbesondere für die ersten Verschiebungsinkremente intensiviert wird. Zudem wird die beschleunigte Schädigungsevolution mit

$$\beta_{\text{mod}}^{\alpha}(d) = 2 \cdot \alpha \cdot (1 - d) \quad (4.130)$$

ausgewertet. Die für die beschriebenen Varianten resultierende Schädigungsentwicklung über die Relativverschiebung von  $\delta_{||} = 10\text{ mm}$  ist in Abbildung 4.28 dargestellt. Während die Schädigungszunahme durch die Funktion  $\beta_{\text{mod}}^{\alpha}$  insgesamt beschleunigt wird, sodass die Verbundzonenschädigung  $d$  bereits am Ende der aufgetragenen Relativverschiebung nahezu den Wert 1 erreicht, bewirkt der quadratische Ansatz für  $\beta_{\text{mod}}$  eine Verringerung der insgesamt erreichten Verbundzonenschädigung. Die Nichtlinearität in der Funktion des Schädigungsentwicklungspotenzials  $\beta_{\text{mod}}$  ermöglicht bei fortgeschrittener Relativverschiebung nur noch einen geringen Schädigungszuwachs, sodass der Verlauf der Schädigungsevolution in Abbildung 4.28 früher abflacht. Phänomenologisch betrachtet ist ein solcher Verlauf plausibel, da insbesondere bei einer hohen Verbundqualität mit tief greifender Mikroverzahnung die anfängliche Ablösung der Oberflächen den größten Beitrag zur Verbundzonenschädigung leistet und sich somit zunächst eine überproportionale Verringerung der Verbundkapazität ergibt. Bei bereits erfolgter Zerstörung der Verzahnung und fortgeschrittener Abrasion der Oberflächen wird durch zusätzliche Relativverschiebungen nur noch eine geringe Schädigungszunahme erwartet.

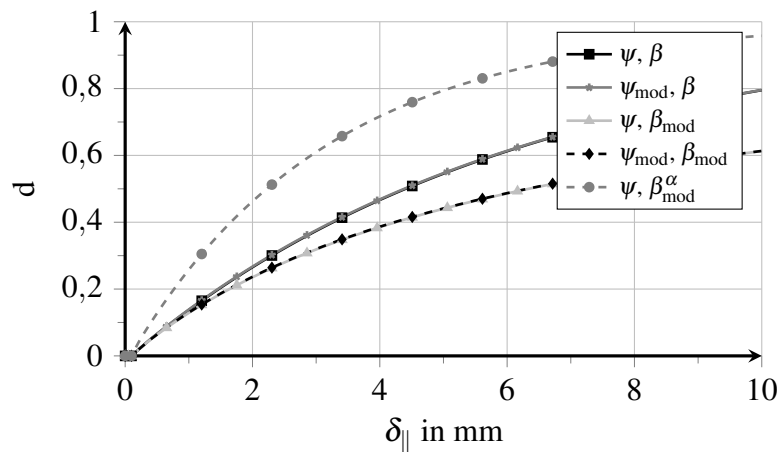


Abbildung 4.28: Verbundzonenschädigung in Abhängigkeit der aufgetragenen Relativverschiebung für verschiedene Varianten der Schädigungsmodellierung

Im Ergebnis unterscheiden sich die verschiedenen Formulierungen qualitativ hinsichtlich des Verlaufes der Schädigungsentwicklung nicht, da alle Varianten einen zunehmend flacher werdenden Kurvenverlauf zeigen, vgl. Abbildung 4.28. Quantitativ ergeben sich über die betrachtete Relativverschiebung  $\delta_{||} = 10\text{ mm}$  infolge der variierenden Entwicklungsgeschwindigkeit der Verbundzonenschädigung deutlich erkennbare Unterschiede.

Bei Berücksichtigung der veränderten Schädigungsentwicklung ergibt sich auch ein veränderter Verbundschubspannungsverlauf über die Relativverschiebung, vgl. Abbildung 4.29. Dabei haben sowohl die modifizierte Degradationsfunktion, als auch die modifizierte Schädigungsentwicklung einen signifikanten, aber entgegengesetzten Einfluss auf die Verbundkapazität. Die Entschleunigung des Schädigungswachstums führt infolge der ebenso verlangsamten Degradation zu weniger geneigten Verbundspannungsverläufen. Die Beschleunigung der Schädigungszunahme mit der Funktion  $\beta_{\text{mod}}^{\alpha}$  hat zur Folge, dass das Debonding schon bei einer geringeren Relativverschiebung abgeschlossen wird und auch daran anschließend zügig die Verbundkapazität abnimmt. Dabei entspricht der Verlauf im hinteren Bereich des Diagramms in Abbildung 4.29 dem Verlauf mit modifizierter Degradationsfunktion  $\psi_{\text{mod}}$ , der bei unveränderter Schädigungsentwicklung einen verstärkten Abbau der Verbundkapazität zeigt.

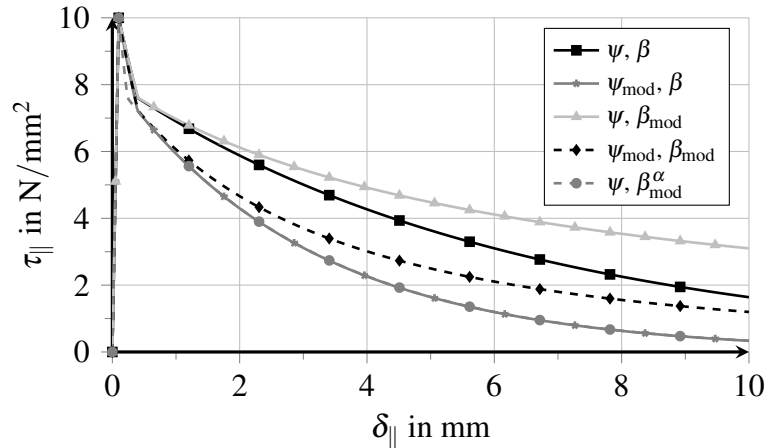


Abbildung 4.29: Verbundschubspannung in Abhängigkeit der aufgetragenen Relativverschiebung für verschiedene Varianten der Schädigungsmodellierung

Die Studie der verschiedenen Varianten für die Schädigungsmodellierung verdeutlicht, dass eine sehr detaillierte Beschreibung des Materialverhaltens in der Verbundzone mit dem entwickelten Modell möglich ist. In Anbetracht der qualitativ sehr ähnlichen Ergebnisse der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen wird für die numerische Analyse von Faserauszugversuchen die Verwendung der linearen Ansatzfunktion sowohl für die Degradationsfunktion  $\psi(d)$  als auch für das Schädigungsentwicklungspotenzial  $\beta(d)$  empfohlen. Dabei ist eine signifikante Beeinflussung des Verbundspannungsverlaufes durch die sorgfältige Kalibrierung des Modellparameters  $\alpha$  möglich. Erst mit detaillierter Kenntnis der Schädigungs- und Degradationsentwicklung aus experimentellen Untersuchungen ist die Wahl und eine entsprechend genaue Kalibrierung von nichtlinearen Funktionen  $\psi(d)$  und  $\beta(d)$  sinnvoll möglich. Für die in Kapitel 6.2 folgenden numerischen Untersuchungen wird daher keine Modifikation der Schädigungsmodellierung entsprechend den hier gewählten Varianten vorgenommen.

#### 4.3.4 Beschreibung der Verbundermüdung

Das entwickelte Materialmodell ist auch prädestiniert für die Beschreibung des Ermüdungsverhaltens der Verbundzone, vgl. Kapitel 3.5. Die Verbundermüdung infolge der häufig wiederkehrenden Be- und Entlastung der Verbundzone entspricht in diesem Materialmodell einer fortschreitenden Degradation. Dabei bleiben geringe Beanspruchungen innerhalb der Versagensfläche entsprechend der elasto-plastischen Modellierung ohne Auswirkungen auf die Verbundkapazität. Erst die lokale Überschreitung der initialen Verbundfestigkeit initiiert eine Schädigungsentwicklung und damit die Degradation der Verbundkapazität. Diese Modellierung entspricht dem in Kapitel 3.5 hergeleiteten Ansatz, dass die maßgebenden Ermüdungsprozesse bei einer teilweisen Ablösung der Faser von der Matrix, d. h. in Phase II des Auszugverhaltens, stattfinden. In diesem Kapitel wird daher die Funktionalität des Materialmodells hinsichtlich zyklischer Beanspruchungen anhand der Modellkonfiguration VM2 nach Tabelle 4.2 beispielhaft für eine Relativverschiebung mit wechselnder Verschiebungsrichtung dargelegt, bevor in Kapitel 6.2 eine numerische Simulation zur Untersuchung der Verbundermüdung vorgestellt wird.

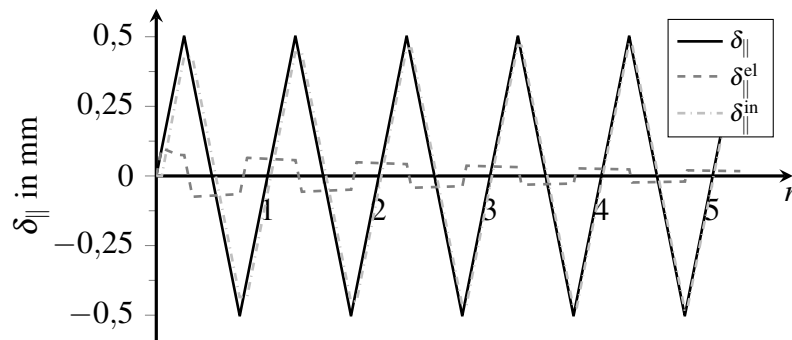


Abbildung 4.30: Elastische, inelastische und totale Relativverschiebung über Lastwechsel für Parametersatz VM2

Zur Verifizierung des lokalen Ermüdungsverhaltens in der Verbundzone wird am Materialpunkt eine kontinuierliche Relativverschiebung mit wechselndem Vorzeichen, d. h. eine wiederholte Be- und Entlastung des Faser-Matrix-Verbundes, anhand der Beispielkonfiguration VM2 nach Tabelle 4.2 ausgewertet. In Abbildung 4.30 sind die elastische, inelastische und totale Relativverschiebung parallel zur Kontaktzone über die ersten fünf Zyklen der Wechselbeanspruchung mit einer Amplitude von  $\Delta = 1 \text{ mm}$  dargestellt. Die Darstellung zeigt deutlich die kontinuierliche Verkleinerung der elastischen Verschiebungsanteile bei gleichzeitigem Anwachsen der inelastischen Anteile in den ersten fünf Zyklen, d. h. bei einer Gesamtverschiebung von  $\delta_{\text{ges}} = 10,5 \text{ mm}$ . Ursache dafür ist die signifikante Schädigung der Verbundzone, die eine Degradation der Verbundkapazität und damit eine Verringerung der elastischen Verschiebungsanteile bewirkt. Entsprechend ist die Verringerung der Verbundschubspannungen nach der Ablösung der Komponenten voneinander in der folgenden Abbildung 4.31 zu erkennen.

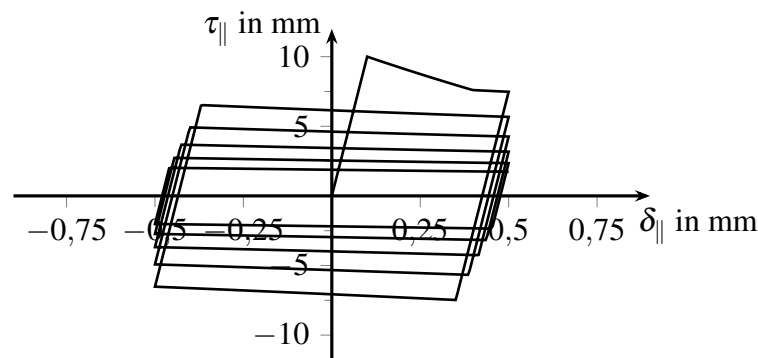


Abbildung 4.31: Verbundschubspannung über die aufgebrauchte Relativverschiebung für Parametersatz VM2

Analog zur monoton steigenden Beanspruchung des Verbundes verringert sich infolge weiterer Relativverschiebungen die Verbundkapazität bei gleichzeitiger Zunahme der Schädigung. Auf den Richtungswechsel der Relativverschiebung folgen eine linear-elastische Entlastung der Verbundzone, eine linear-elastische Wiederbelastung in entgegengesetzter Richtung und eine nichtlineare Überbeanspruchung der Verbundzone, die eine weitere Schädigung und Degradation der Verbundkapazität bewirkt. Der Verlauf der Verbundschubspannungen über die ersten fünf Zyklen der Wechselbeanspruchung in Abbildung 4.32 ist daher vergleichbar mit der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung bei monoton steigender Beanspruchung der Verbundzone in Abbildung 4.19.



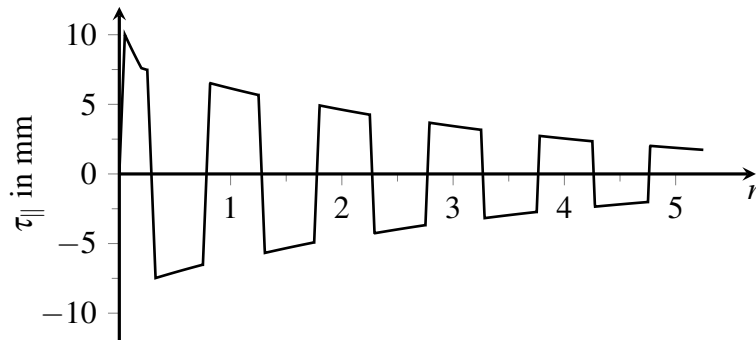


Abbildung 4.32: Verlauf der Verbundschubspannung über Lastwechsel für Parametersatz VM2

Die folgende Abbildung 4.33 zeigt die Schädigungs- und die Degradationsentwicklung für die in Kapitel 4.2 dargestellte Schädigungsmodellierung mit linearem Zusammenhang zwischen der Verbundzonenschädigung  $d$  und der Degradation  $\psi$ . Die kontinuierliche Zunahme der Schädigungsvariablen ist nur während der elastischen Beanspruchungsumkehr unterbrochen, wobei diese Unterbrechung analog zur Größe der elastischen Relativverschiebungen mit jedem Belastungszyklus weiter verschwindet.

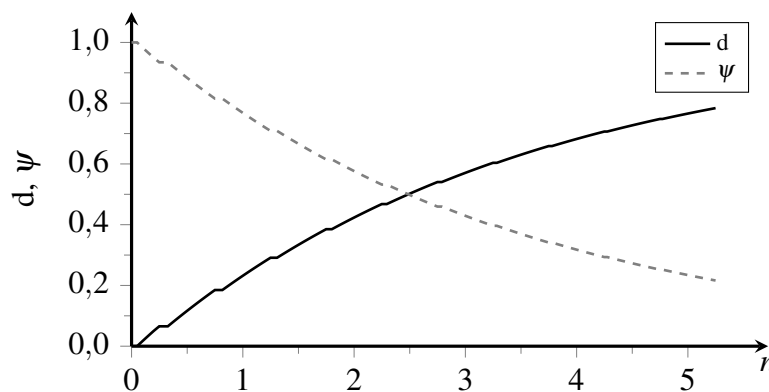


Abbildung 4.33: Verlauf der Verbundzonenschädigung und Degradation über Lastwechsel für Parametersatz VM2

Die hier ausgewertete Modellierung des Verbundverhaltens ist geprägt durch die Degradationsentwicklung infolge der wachsenden Verbundzonenschädigung. Die Schädigungszunahme und die Verringerung der Verbundkapazität erfolgen richtungsunabhängig und damit auch bei einer Relativverschiebung mit wechselnder Verschiebungsrichtung. Da in diesem Materialmodell keine Ermüdungsschädigung bei elastischem Schlupf vorgesehen ist, ist die Beschreibung einer Verbundermüdung nur möglich, wenn die initiale Verbundfestigkeit überschritten wird und die Amplitude der Relativverschiebungen den elastischen Anteil übersteigt, vgl. Abbildung 4.30.

Entsprechend der in Kapitel 3.5 erläuterten Hypothese basiert die Ermüdungsschädigung der Verbundzone auf Relativverschiebungen, die bei zum Teil abgelösten Kontaktoberflächen die Degradation des lokalen Verbundwiderstandes initiieren. Dieser grundsätzlichen Überlegung entspricht die hier vorgestellte Modellierung des Verbundverhaltens. Bei einer wiederkehrenden Be- und Entlastung der Verbundzone eines Faser-Matrix-Verbundes mit der Einbindelänge  $\ell_e$  findet die Ermüdungsschädigung im bereits durch die erstmalige Beanspruchung abgelösten Bereich der Verbundzone statt. Infolge des mit jedem Belastungszyklus weiter abnehmendem lokalen

Verbundwiderstandes in diesem Bereich, schreitet die Ablösung der Komponenten voneinander weiter fort. Dadurch wird der allmählich ermüdende Anteil der Verbundzone für die folgenden Belastungszyklen Stück für Stück vergrößert. Erst mithilfe von numerischen Untersuchungen zum Faserauszugproblem können mögliche Spannungsumlagerungen, die die Verbundermüdung verstärken oder abmindern, erfasst und analysiert werden. Detaillierte numerische Untersuchungen zur Verbundermüdung sind dem Kapitel 6.2 zu entnehmen.



## 5 Modellierung des Faserauszugverhaltens

Die Modellierung des Faserauszugverhaltens erfolgt im Rahmen dieser Arbeit auf der Mesoskala mit den separat beschriebenen Komponenten Faser, Matrix und Verbundzone. Die Strukturen von Faser und Matrix werden dabei kontinuumsmechanisch verschmiert betrachtet. Die numerische Simulation von Faserauszugversuchen, vgl. Kapitel 6.2 ermöglicht das detaillierte Nachvollziehen der Schädigungs- und Degradationsprozesse innerhalb der Grenzschicht und erlaubt so Rückschlüsse auf die Fasertragwirkung in Faserverbundwerkstoffen, vgl. Kapitel 6.3. Insbesondere bei der Modellierung des Faser-Matrix-Verbundes mit Mikrofasern ergeben sich aus den Größenverhältnissen von Faser, Verbundzone und mittragender Matrix Herausforderungen im Bezug auf die räumliche Diskretisierung des Modells. Darüber hinaus erfordert die Simulation des vollständigen Herausziehens der Faser aus der Matrix die kontinuierliche Auswertung des Kontaktes entlang der Fasereinbindelänge. Im folgenden Kapitel wird zunächst das Gesamtmodell des Faser-Matrix-Verbundes vorgestellt, bevor anschließend die Modellierung der Verbundzone mit Berücksichtigung von variierendem Kontakt im Detail erläutert wird. Die Entwicklung des Geometriemodells erfolgt für gerade Mikrofasern mit glatter Oberfläche, wobei die Anwendung für andere Faserarten und -geometrien grundsätzlich möglich ist.

### 5.1 Dreidimensionales Finite-Elemente-Modell

Das Faserauszugproblem als nichtlineares Differenzialgleichungssystem wird im Rahmen dieser Arbeit numerisch mithilfe der Finite-Elemente-Methode gelöst, vgl. Kapitel 4.1. Dafür wird eine dreidimensionale Modellierung des Faser-Matrix-Verbundes nach der Verschiebungsmethode gewählt. Der Faser-Matrix-Verbund umfasst zwei Strukturen mit unterschiedlichem Materialverhalten sowie den Kontaktbereich der gekoppelten Komponenten. Im Folgenden werden das Berechnungsmodell und das allgemeine Vorgehen zum Aufbau und zur Lösung des Gleichungssystems dargestellt.

#### 5.1.1 Beschreibung des Berechnungsmodells

Die Beschreibung des Faser-Matrix-Verbundes kann je nach Zielsetzung und Abmessungen der zu untersuchenden Struktur in unterschiedlichen Diskretisierungsstufen erfolgen. KEUSER unterscheidet hinsichtlich des Verbundwerkstoffes Stahlbeton vier Stufen der Diskretisierung und definiert dementsprechend vier Verbundmodelle, die die Kraftübertragung zwischen Beton und Bewehrung in Abhängigkeit des Idealisierungsgrades der Kontaktfläche und mit Berücksichtigung verschiedener direkter und indirekter Einflüsse auf die Verbundwirkung beschreiben [Keu84]. Eng mit der Idealisierung der Kontaktzone verknüpft ist auch die Modellierung der Bewehrung selbst, die diskret, verschmiert oder eingebettet erfolgen kann [Hub06].

KEUSER stellt einen Modellierungsansatz vor, der bei einer diskreten Modellierung der Bewehrung mit eindimensionalen Stabelementen, welche bis zur Rissbildung im Beton starr an die ebenen oder räumlichen Betonelemente gekoppelt sind, die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (*engl.* tension-stiffening effect) mithilfe eines verschmierten Verbundmodells berücksichtigt [Keu84]. Alternativ kann insbesondere zur Berücksichtigung von Bewehrungsnetzen in unterschiedlichen Lagen auch eine verschmierte Modellierung der Bewehrung eine effiziente Berücksichtigung der Bewehrungswirkung in Stahlbetonstrukturen einschließlich der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen ermöglichen, vgl. [Keu84], [Hub06]. Demgegenüber

verwendet HUBER zur Modellierung der Bewehrung eingebettete Stabelemente im Rahmen eines Rebar-Modells und berücksichtigt die Verbundwirkung dabei über eine Diskontinuität zwischen den Verschiebungen von Bewehrung und Betonmatrix mithilfe zusätzlich eingeführter Verbundfreiheitsgrade [Hub06].

Erst in höher aufgelösten Diskretisierungen der Stahlbetonstruktur mit diskreter Modellierung der Bewehrung und der Kontaktzone kann das Verbundverhalten explizit in einem Verbundmodell etwa mit einer Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung berücksichtigt werden, wobei die Anforderungen an das Verbundmodell in Abhängigkeit der Modellierungsskala variieren [Kau84]. Entsprechend kann die Bewehrung selbst zwei- oder dreidimensional mit eigenständigen Elementen mit und ohne die Abbildung der Oberflächengeometrie oder eindimensional als Stabelemente, die lediglich eine Ausdehnung in Längsrichtung aufweisen, modelliert werden [Kau84]. Als wesentlichen Nachteil dieser diskreten Modellierung gilt die Abhängigkeit der Diskretisierung von der Bewehrungsführung, die insbesondere bei komplexeren Verteilungen der Stahleinlagen einen hohen Modellierungsaufwand nach sich zieht, vgl. [Hub06].

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine in einer UHPC-Matrix eingebettete Stahlfaser diskret aufgelöst und in Verbindung mit der Kontaktzone zwischen Faser und Matrix auf der Mesoskala modelliert. Die Verbundreaktion wird entsprechend dem entwickelten Materialmodell in Abhängigkeit des Spannungs-Deformations-Zustandes in unmittelbarer Umgebung der Verbundzone entlang der Fasereinbindelänge ermittelt.

Die in Kapitel 3.3 genannten nichtlokalen Einflussfaktoren auf das Auszugverhalten werden erst durch die Modellierung des starren und verschieblichen Faser-Matrix-Verbundes aktiviert. Dabei erfasst das Geometriemodell der Verbundzone die Fasergeometrie auf der Mesoebene, d. h. beispielsweise Länge, Durchmesser und Neigung der Faser oder die Form der Endverankerung, aber nicht die mikroskopische Topografie der Grenzschicht. Eine spezielle Oberflächenbeschaffenheit der Faser, die einen signifikanten Einfluss auf die Verbundqualität hat, ist im Rahmen der Materialmodellierung der Verbundzone zu erfassen, vgl. Kapitel 4.2. Die folgende Abbildung 5.1 zeigt das Geometriemodell für die Simulation eines Faserauszugversuches mit den zwei Strukturkomponenten Faser und Matrix sowie der Grenzschicht, die im Modell keine physikalische Dicke aufweist.

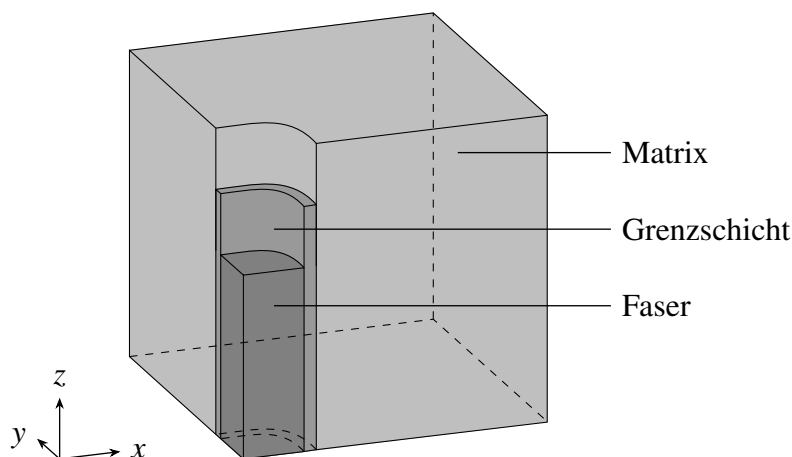


Abbildung 5.1: Schematische Darstellung des Geometriemodells für den Faser-Matrix-Verbund

Die Kopplung von verschiedenartigen Strukturen für numerische Untersuchungen mit der Finite-Elemente-Methode kann starr oder mithilfe von Verbundelementen erfolgen. Während zwei Strukturelemente bei einer starren Kopplung gemeinsame Knoten in der Kontaktebene haben, entsteht bei der Verwendung von Kontaktelementen keine gemeinsame Elementoberfläche zwischen den Strukturen. Ein Überblick über die drei am häufigsten verwendeten Kontaktelemente, dem Bond-Link-Element, dem Interface-Element und dem Bond-Slip-Element, wird in Kapitel 5.2 gegeben.

Im Rahmen dieser Arbeit wird zur Diskretisierung der Verbundzone in finite Elemente ein „Zero-Thickness“-Interface-Element verwendet, das mittels laufend aktualisierter Kontaktfeststellung adaptiv auf große Verschiebungen der Faser reagieren kann, vgl. Kapitel 5.3. Die räumliche Diskretisierung der Strukturen erfolgt mit hexaedrischen Volumenelementen. Dem isoparametrischen Konzept entsprechend, beschreiben die zugehörigen Formfunktionen sowohl die Elementgeometrie als auch sein Verformungsverhalten. Die Knotenfreiheitsgrade sind die physikalischen Beschreibungsgrößen des Deformationszustandes, i. e. die Verschiebungen  $u$ ,  $v$  und  $w$  entsprechend der kartesischen Koordinaten  $x$ ,  $y$  und  $z$ . Im folgenden Kapitel werden kurz der Aufbau und die Lösung des nichtlinearen globalen Gleichungssystems entsprechend der Finite-Elemente-Methode dargestellt.

### 5.1.2 Aufbau und Lösung des Gleichungssystems

Auf die Idealisierung der Struktur und die Festlegung der unbekannten Knotenfreiheitsgrade, mit denen das Deformationsverhalten der Gesamtstruktur beschrieben wird, folgt die Aufstellung und Lösung der Gleichgewichtsbedingungen für den zugbeanspruchten Faser-Matrix-Verbund, vgl. [Bat02]. Sofern die exakte Lösung der Differenzialgleichungen nicht bekannt ist, kann das Gleichgewicht alternativ auch mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) beschrieben werden [Bat02], [Din19]. Danach verschwindet die Summe der am Gesamtsystem geleisteten, virtuellen inneren und äußeren Arbeiten eines Spannungszustandes auf einem kinematisch zulässigen Verformungszustand [Bat02], [AD17]. Die Grundgleichungen der Kinematik und des Werkstoffgesetzes sind dabei in der Arbeitsgleichung enthalten und werden exakt erfüllt [Bat02]. Der Grundidee der Finite-Elemente-Methode entsprechend kann die virtuelle Arbeit der Gesamtstruktur auch mit

$$\delta A = \sum \delta A_{\text{El}} = 0 \quad (5.1)$$

als Summe aller virtuellen Elementarbeiten dargestellt werden, d. h. die Diskretisierung der Arbeitsgleichung erfolgt auf Elementebene und kann für den verwendeten Elementtyp programmiertechnisch optimiert werden [AD17]. Die integrale Formulierung der Gleichgewichtsbedingung über die Gesamtstruktur mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen stellt eine schwache Form des Gleichgewichtes dar, d. h. am differenziellen Element ist die Gleichgewichtsbedingung nur näherungsweise erfüllt [AD17].

Zur Bestimmung der virtuellen Arbeit eines Elementes wird die Arbeitsgleichung hier in Weggrößenformulierung mithilfe der gewählten Ansatzfunktionen diskretisiert. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Faserauszugproblem auf eine quasi-statische Betrachtung reduziert, d. h. Trägheits- und Dämpfungskräfte werden nicht berücksichtigt und die zeitveränderliche Beanspruchung wird mit der erforderlichen Auflösung inkrementell vorgegeben, vgl. z. B. [Bat02]. Die Wahl der Ansatzfunktionen, die bei isoparametrischen Elementtypen gleichzeitig die Formfunktionen

zur Beschreibung der Elementgeometrie sind, ist an bestimmte Bedingungen geknüpft, die die Konvergenz der Näherungslösung gegen die exakte Lösung sicherstellen. Neben einer im Hinblick auf eine Nachlaufrechnung zur Bestimmung der Spannungen erforderliche Ansatzordnung wird die Stetigkeit der Ansatzfunktionen und deren Ableitungen an den Elementübergängen bis zu den Verzerrungsgrößen gefordert [AD17]. Die konformen Ansätze müssen außerdem koordinateninvariant formuliert und so abgestimmt sein, dass bei Starrkörperverschiebungszuständen keine Verzerrungen und damit Spannungen generiert werden [AD17]. Die Qualität der Ergebnisse nach abgeschlossener Nachlaufrechnung ist abhängig von der Güte des Verschiebungsansatzes hinsichtlich der Beschreibung des exakten Verformungsverhaltens in Verbindung mit der gewählten Netzfeinheit [Kau84]. Die elementweise Integration der Arbeitsgleichung liefert die Elementsteifigkeitsmatrix, die Kräfte und Verschiebungen an den Elementknoten in eine Beziehung zueinander stellt, sowie den Elementlastvektor. Zur Systemarbeit aufaddiert entsteht ein lineares Gleichungssystem in Matrizenschreibweise

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{p} \quad (5.2)$$

mit Systemsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ , Systemlastvektor  $\mathbf{p}$  und dem Vektor der Freiheitsgrade  $\mathbf{v}$  aller Elemente als Unbekannte, das nach Einbau der Randbedingungen gelöst wird.

Bei Aufgabenstellungen mit physikalisch und geometrisch nichtlinearen Differenzialgleichungen ist die geschlossene Lösung des Gleichungssystems in einem Berechnungsschritt nicht mehr möglich, da die Steifigkeit des Systems selbst beanspruchungsabhängig ist. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher auf Systemebene das inkrementell-iterative NEWTON-RAPHSON-Verfahren verwendet, das auch auf Materialebene zur Lösung der physikalisch nichtlinearen Differenzialgleichungen mit dem Punkt-Kollokations-Verfahren zur Anwendung kommt, vgl. Kapitel 4.2. Eine adaptive Zeitschrittsteuerung erlaubt zudem die Modifikation der Größe der Beanspruchungssinkremente in Abhängigkeit des Konvergenzverhaltens zur Verbesserung der Genauigkeit und Effizienz der Berechnung. Als Abbruchkriterien bei Konvergenz der Lösung werden im Rahmen dieser Arbeit für das globale Gleichungssystem in Analogie zu Gleichung (4.72) mit einem Grenzwert von  $\varepsilon = 1,0e^{-6}$

$$\left\| \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{v}} \right\|_2 < \varepsilon \quad (5.3)$$

in Verbindung mit

$$\|\mathbf{r}\|_2 < \varepsilon \quad (5.4)$$

definiert, die zeitgleich erfüllt sein müssen. Außerdem wird eine maximale Anzahl an Iterationsschritten festgelegt, innerhalb derer die Konvergenz der Lösung geprüft wird. Beim Erreichen dieser Zahl an Iterationsschritten wird die Iteration ergebnislos abgebrochen und mit reduzierter Schrittweite, d. h. mit einem kleineren Beanspruchungssinkrement, wiederholt. Eine schnelle Konvergenz in weniger Iterationen als eine definierte minimale Anzahl an Iterationsschritten führt analog dazu zu einer Vergrößerung des Inkrementes für den nächsten Berechnungsschritt. Nach erfolgreicher Konvergenz wird in einer Nachlaufrechnung der Spannungs-Deformations-Zustände an den Materialpunkten auf Basis der endgültigen Lösung für das jeweilige Beanspruchungssinkrement aktualisiert.

Die Implementierung des entwickelten Verbundmodells erfolgt im Rahmen dieser Arbeit in ein zu Forschungszwecken entwickeltes, institutseigenes FE-Programm. Die Nachlaufrechnung

für Schnittgrößen und Spannungen an den Knoten erfolgt hier für die Ausgabe der Ergebnisse vereinfacht. Auf eine Ausgabe der Verläufe und Knotenkennwerte der Materialzustandsgrößen, wie beispielsweise der Verzerrung, Spannung oder Schädigung, wird verzichtet. Die noch unbekannten Materialzustandsgrößen an den Knoten werden unabhängig von den tatsächlichen Elementgrößen als arithmetisches Mittel der Zustandsgrößen an den umliegenden Materialpunkten bestimmt, welche bei der numerischen Integration der Arbeitsgleichung in diesen Stützstellen ermittelt werden. Damit werden auch die infolge der Ansatzfunktionen zu erwartenden Spannungssprünge an den Elementübergängen unsichtbar.

Die Lösung des linearisierten Gleichungssystems im NEWTON-RAPHSON-Verfahren kann direkt oder iterativ erfolgen. Insbesondere bei großen FE-Modellen ist eine direkte Lösung des Gleichungssystems nicht mehr möglich. Außerdem kann die Effizienz häufig durch parallelisiertes Gleichungslösen verbessert werden. Aufgrund der hohen Komplexität des zusammengesetzten Gleichungssystems sind im Rahmen dieser Arbeit trotz optimierter Bandbreite in der Regel iterative Lösungsverfahren erforderlich.

## 5.2 Geometriemodell für die Verbundzone

Die diskrete Auflösung der Verbundzone in Finite-Elemente-Analysen erfordert die Anwendung von Verbundelementen, welche in der Literatur u. a. auch als Grenzschiebtelemente, Kontaktelemente oder Interface-Elemente bezeichnet werden. Darüber hinaus sind insbesondere hinsichtlich makroskopischer Bauteilsimulationen auch implizite Ansätze für die Erfassung der Verbundwirkung gebräuchlich. Einen Überblick über verschiedene Ansätze für die Modellierung des Verbundes geben beispielsweise COX & HERRMANN und MAZUMDER [CH98], [Maz14]. Im Rahmen dieser Arbeit ist eine explizite Modellierung der Verbundzone mit Verbundelementen vorgesehen, die das Zusammenwirken der Komponenten des Faser-Matrix-Verbundes abbilden. Daher wird im Folgenden kurz auf unterschiedliche Verbundelementtypen eingegangen, bevor das hier verwendete „Zero-Thickness“-Interface-Element vorgestellt und verifiziert wird.

### 5.2.1 Modellierungsansätze für die Verbundzone

Als zwei- oder dreidimensionales Federelement ohne physikalische Ausdehnung kann das Bond-Link-Element die Verbundreaktion zwischen zwei gekoppelten Knoten mit identischen Koordinaten in Abhängigkeit der Relativverschiebung beschreiben. Zahlreiche Weiterentwicklungen des ursprünglich 1967 von NGO & SCORDELIS vorgeschlagenen Elementtyps erlauben bei Anwendung linearer und nichtlinearer Materialgesetze vielfältige Anwendungsmöglichkeiten für dieses einfache Element, von denen KEUSER einige benennt [Kau84]. Da das Bond-Link-Element in Finite-Elemente-Analysen häufig als zu steif bewertet wird, führt die Berücksichtigung von umliegenden Nachbarknoten bei der Ermittlung von realistischen Federsteifigkeiten schließlich auf die Weiterentwicklung dieses Elementtyps hin zu einem flächigen Verbundelement mit kontinuierlichem Verschiebungsansatz [Kau84].

Basierend auf dem Ansatz von GOODMAN, TAYLOR & BREKKE für den Verbund in geschichtetem Felsgestein aus dem Jahr 1968 entwickelten HOSHINO und SCHÄFER jeweils das Bond-Link-Element weiter zu einem Verbundelement für die Beschreibung einer Kontaktschicht zwischen zwei Oberflächen, deren Verschiebungsansatz mit den umgebenden Strukturen kompatibel ist



[Kou84], vgl. [GTB68], [Sch75a]. Eine Weiterentwicklung dieses Verbundelementes entsprechend der allgemeinen Herleitung von SCHÄFER mit beliebigem Verschiebungsansatz stellt KEUSER vor [Kou84], [MKKK85]. Dabei wird eine isoparametrische Formulierung des Elementes gewählt, sodass neben einer zweidimensionalen Geometrie auch rotationssymmetrische und dreidimensionale Kontaktschichten mit beliebigen Materialgesetzen beschrieben werden können [Kou84]. KEUSER vergleicht das isoparametrische Verbundelement mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen auch mit dem Bond-Link-Element anhand einer Energiebetrachtung und belegt so die verbesserte Genauigkeit des flächigen Elementansatzes gegenüber der Knotenkopplung [Kou84], [KM87].

SCHÄFER leitet die Relativverschiebungen an den Knoten des Verbundelementes als Eingangsgröße für die Ermittlung der Verbundreaktion aus den Knotenverschiebungen der angrenzenden Elemente her [Sch75a]. Dafür muss das Interface-Element sich mindestens je eine Oberfläche mit den angrenzenden Strukturelementen teilen. Während ein „Zero-Thickness“-Interface-Element als Flächenelement keine weiteren Elementoberflächen besitzt, ist auch die Verwendung von Volumenelementen in der Kontaktzone möglich. Wie bereits angesprochen, weist die dreidimensionale Modellierung insbesondere für dünne Grenzschichten den entscheidenden Nachteil einer sehr feinen, erforderlichen Diskretisierung der Verbundzone auf, vgl. z. B. [KM87], [Has90], [CH98], [Nai07]. Gegenüber der expliziten Modellierung der dreidimensionalen Grenzschicht zwischen Faser und Matrix mit Volumenelementen hat sich daher die Verwendung von zweidimensionalen Interface-Elementen zur Beschreibung der Verbundreaktion durchgesetzt, vgl. Kapitel 4.1.

Einen sich von diesen beiden Elementtypen grundsätzlich unterscheidender Ansatz stellt das Verbundzonenelement von DE GROOT ET AL. dar, der die Verbundwirkung gemeinsam mit der versteifenden Wirkung der Bewehrung erfasst [Kou84]. KEUSER fasst die Herleitung dieses Elementtyps zusammen und kritisiert vor allem die mangelnde Flexibilität dieses spezialisierten Ansatzes hinsichtlich des verwendeten Werkstoffgesetzes zur Beschreibung des Verbundverhaltens [Kou84], [KM87].

Im Jahr 2016 stellen PAGGI & WRIGGERS für numerische Simulationen im Rahmen der Bruchmechanik ein neuartiges Interface-Element in Anlehnung an die Kontaktmechanik vor, das sich vor allem durch die Fähigkeit auszeichnet, unterschiedlich diskretisierte Oberflächen in zwei- und dreidimensionalen Kontaktproblemen zu koppeln [PW16]. Die Simulation großer Relativverschiebungen in der Kontaktzone ist dabei allerdings nicht vorgesehen, sodass die starre Kopplung der Kontaktoberflächen nicht gelöst oder variiert werden kann [PW16]. Untersuchungen zur Steifigkeit des an das neuartige Interface-Element angelehnte Kohäsivzonenmodells anhand verschiedener Beanspruchungssituationen gemäß den typischen Deformationsmoden der Bruchmechanik zeigt BAYAT, vgl. [Bay20].

Für die Anwendung im Rahmen dieser Arbeit eignet sich demnach nur das isoparametrische Verbundelement entsprechend der Weiterentwicklung nach KEUSER, das im folgenden Kapitel näher beschrieben wird.

### 5.2.2 Das „Zero-Thickness“-Interface-Element

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Diskretisierung der Verbundzone im dreidimensionalen FE-Modell des Faser-Matrix-Verbundes, vgl. Abbildung 5.1, mit isoparametrischen „Zero-Thickness“-Interface-Elementen. Diese Interface-Elemente sind Flächenelemente mit einer Ele-

mentdicke von null und Doppelknoten, deren Knoten zunächst identische Koordinaten aufweisen, starr mit jeweils einer der Strukturoberflächen in der Grenzschicht verbunden und damit unabhängig voneinander sind. Eine detaillierte Herleitung dieses Elementtyps zeigt KEUSER, vgl. [Keu84]. Im Hinblick auf die vorgesehene Erweiterung des Elementkonzeptes um einen Kontaktalgorithmus, vgl. Kapitel 5.3, werden die Grundzüge der hier verwendeten Formulierung im Folgenden kurz zusammengefasst.

Die Elementfläche des zweidimensionalen Interface-Elementes wird durch seine dimensionslosen, örtlichen Koordinaten  $\xi$  und  $\eta$  jeweils in den Grenzen  $[-1; 1]$  als quadratisches Referenzelement mit dem Flächeninhalt  $A = 4$  beschrieben, vgl. Abbildung 5.2. Dem Isoparametrikonzept entsprechend erfolgt die Transformation zwischen dem örtlichen Referenzkoordinatensystem und den globalen Koordinaten mithilfe der Formfunktionen  $\phi_i(\xi, \eta)$  und den Elementknotenkoordinaten  $\tilde{\mathbf{X}}$ . In Matrixschreibweise werden die globalen Koordinaten  $\mathbf{x}_P$  eines Punktes  $P$ , dessen Position im Referenzelement mit den Koordinaten  $\xi_P$  und  $\eta_P$  bekannt ist, mithilfe des Vektors der Formfunktionen

$$\mathbf{N} = [\phi_A \quad \phi_B \quad \phi_C \quad \phi_D \quad \dots]^T \quad (5.5)$$

und den globalen Koordinaten der Elementknoten

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \\ x_D & y_D & z_D \\ \dots & & \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

zu

$$\mathbf{x}_P^T = \mathbf{N}^T(\xi_P, \eta_P) \cdot \tilde{\mathbf{X}} \quad (5.7)$$

berechnet. Für lineare LAGRANGE-Polynome als Ansatzfunktionen für ein Interface-Element mit vier Knoten, wie sie beispielsweise im Rahmen dieser Arbeit verwendet werden, lautet der Vektor der Formfunktionen

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1 - \xi_P) \cdot (1 - \eta_P) \\ \frac{1}{4}(1 + \xi_P) \cdot (1 - \eta_P) \\ \frac{1}{4}(1 + \xi_P) \cdot (1 + \eta_P) \\ \frac{1}{4}(1 - \xi_P) \cdot (1 + \eta_P) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

und kann mit den örtlichen Koordinaten eines Punktes  $P$  ausgewertet werden. Die Ansatzfunktionen nach LAGRANGE besitzen mit den Knotenverschiebungen physikalisch interpretierbare Skalierungsfaktoren als Freiheitsgrade und erfüllen die Kriterien für gegen die exakte Lösung konvergierende Ansätze [AD17]. Die Koordinatentransformation nach Gleichung (5.7) ist für den im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Algorithmus zur Knotenzuordnung (*engl.* node mapping) von besonderer Bedeutung, vgl. Kapitel 5.3.

Für die Auswertung der Verbundreaktion auf Materialebene ist darüber hinaus das lokale Koordinatensystem des Interface-Elementes von Bedeutung, das die tangentialen Verschiebungsrichtungen  $s$  und  $t$  sowie die Normalenrichtung  $n$  unterscheidet, vgl. Abbildung 5.2. Dabei beschreibt

die Normalenrichtung  $n$  die Verbundwirkung aufgrund von Relativverschiebungen orthogonal zur Kontaktebene, während die Verbundschubspannungen entsprechend der Faserauszugsrichtung  $t$  und orthogonal dazu in Faserumfangsrichtung  $s$  bestimmt werden. Für die Auswertung der Verbundspannungen über eine Verbundfläche sind die lokalen Koordinatenrichtungen des Interface-Elementes für alle Elemente dieser Kontaktfläche einheitlich zu definieren. Daher bietet es sich an, die Auszugsrichtung mit dem normierten Einheitsvektor  $\mathbf{n}_t$  als maßgebende Bewegungsrichtung vorzugeben und die Bestimmung der übrigen Koordinatenrichtungen daran zu orientieren.

Die Bestimmung der Normalenrichtung auf der Kontaktfläche erfolgt mithilfe der JACOBI-Matrix, die die partiellen Ableitungen der globalen Koordinaten nach den örtlichen Referenzkoordinaten zusammenfasst und damit eine Transformationsvorschrift darstellt [ZFT14]. Da nur zwei Referenzkoordinaten zur Verfügung stehen, hat die Operatormatrix die Größe  $2 \times 3$ . Mithilfe der Formfunktionen  $\mathbf{N}(\xi, \eta)$  kann die JACOBI-Matrix in Matrixschreibweise allgemein als

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \tilde{\mathbf{X}} \quad (5.9)$$

geschrieben werden [ZFT14]. Analog zu Gleichung (5.7) wird mit dem Einsetzen von Referenzkoordinaten  $\xi_P$  und  $\eta_P$  in die partiellen Ableitungen der Formfunktionen die JACOBI-Matrix an einem Punkt  $P$  ausgewertet.

Mit den Zeilen der JACOBI-Matrix sind zwei zueinander orthogonale Richtungsvektoren in der Ebene der Elementfläche für einen Punkt  $P$  gegeben. Das Kreuzprodukt dieser Richtungsvektoren ergibt den Normalenvektor in dem Punkt  $P$ , der mithilfe der euklidischen Norm auf seine Länge normiert als Einheitsvektor

$$\mathbf{n}_n = \frac{\frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \eta}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \eta} \right\|_2} \quad (5.10)$$

die Normalenrichtung beschreibt und in die Transformationsvorschrift eingeht. Die Transformation der lokalen Verbundreaktion mit einer dreidimensionalen Verbundspannung und Verbundsteifigkeit in das globale Koordinatensystem erfolgt mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_s^T \\ \mathbf{n}_t^T \\ \mathbf{n}_n^T \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

die aus den Einheitsvektoren der drei lokalen Koordinatenrichtungen zusammengesetzt ist, sodass die Transformation der Verbundspannungen  $\boldsymbol{\tau}$  mit

$$\boldsymbol{\tau}_{gl} = \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\tau}_{lo} \quad (5.12)$$

und der Materialtangente  $\mathbf{C}$  entsprechend Gleichung (4.106) in allgemeiner Form mit

$$\mathbf{C}_{gl} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{C}_{lo} \cdot \mathbf{T} \quad (5.13)$$

durchgeführt werden kann. Mit den bekannten Einheitsvektoren  $\mathbf{n}_t$  für die tangentiale Verschiebungsrichtung und  $\mathbf{n}_n$  für die Normalenrichtung kann der noch unbekannte Richtungsvektor  $\mathbf{n}_s$ , der orthogonal zu den übrigen Einheitsvektoren in der Elementebene liegt, mithilfe des Kreuzproduktes normiert zu

$$\mathbf{n}_s = \frac{\mathbf{n}_t \times \mathbf{n}_n}{\|\mathbf{n}_t \times \mathbf{n}_n\|_2} \quad (5.14)$$

bestimmt werden.

Die Auswertung der Verbundreaktion auf der Materialebene, vgl. Kapitel 4.2 erfordert die Bestimmung von Relativverschiebungen zwischen den angrenzenden Strukturen. Daher werden die Knoten des zweidimensionalen Interface-Elementes jeweils zu voneinander unabhängigen Doppelknoten mit zunächst identischen Koordinaten erweitert. Im Rahmen dieser Arbeit entspricht jeweils einer der Doppelknoten einem Oberflächenknoten eines Strukturelementes der Matrix, d. h. das Verbundelement ist starr an die Matrixoberfläche gekoppelt. Der jeweils andere Knoten des Knotenpaares ist starr an die Faseroberfläche gekoppelt und kann durch die erweiterte Knotenzuordnung im verschieblichen Verbund entsprechend Kapitel 5.3 variierenden Oberflächenknoten der Strukturelemente der Faser entsprechen. Im Folgenden werden diese Knoten als virtuelle Pseudoknoten bezeichnet, da ihnen in dieser Formulierung des Interface-Elementes keine realen Freiheitsgrade im Gesamtsystem zugeordnet werden, vgl. Kapitel 5.3. Im Initialzustand der Kontaktzone mit starrem Verbund zwischen den Strukturen entsprechen die Pseudoknoten exakt den angrenzenden Oberflächenknoten der Faserelemente. In der folgenden Abbildung 5.2 sind beispielhaft ein zweidimensionales „Zero-Thickness“-Interface-Element mit vier Doppelknoten und linearen Formfunktionen zur Beschreibung seiner Geometrie sowie das dazugehörige quadratische Referenzelement dargestellt.

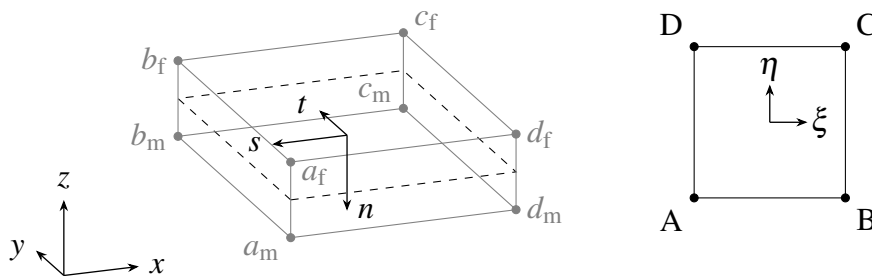


Abbildung 5.2: „Zero-Thickness“-Interface-Element mit vier Doppelknoten im globalen und lokalen Koordinatensystem und Referenzelement mit örtlichen Koordinaten

Die dreidimensionale Relativverschiebung  $\delta$  entspricht der Differenz der Verschiebungen  $\mathbf{u}$  eines jeden Knotenpaares und wird zur Auswertung der Verbundreaktion auf Materialebene in das lokale Koordinatensystem des Interface-Elementes transformiert. Die Vorzeichendefinition für die Relativverschiebung ist so gewählt, dass bei einer aufklaffenden Verbundzone zwischen Faser und Matrix eine positive Relativverschiebung in Normalenrichtung entsteht, die positive Querzugspannungen induziert. Da die positive Normalenrichtung im Interface-Element durch die entsprechende, vorab im Rahmen der Netzgenerierung durchgeführte Sortierung der Knoteninzidenzen von der Kontaktoberfläche in Richtung des Matrixinneren definiert ist, entspricht

die Änderung der Relativverschiebungen an der Stelle  $x$  entlang der Verbundlänge  $\ell_b$  mit

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}(x) = \dot{\mathbf{u}}_m(x) - \dot{\mathbf{u}}_f(x) \quad (5.15)$$

der Rate der Verschiebung der Matrixoberfläche abzüglich der Verschiebungsänderung an der Faseroberfläche. Ein Auszug der Faser aus dem unverschieblich gelagerten Faser-Matrix-Verbund verursacht demnach negative Relativverschiebungen  $\delta_t$  und somit auch negative Verbundschubspannungen  $\tau_t$  entlang der Verbundzone. In Matrixschreibweise kann die Kinematik, d. h. der Zusammenhang zwischen Relativverschiebungen  $\boldsymbol{\delta}$  und den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  der beiden Kontaktoberflächen, für jede beliebige Stelle mit der Hilfsmatrix  $\mathbf{B}$  als

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_m \\ v_m \\ w_m \\ u_f \\ v_f \\ w_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_m - u_f \\ v_m - v_f \\ w_m - w_f \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

zusammengefasst werden.

Das Werkstoffgesetz zur Bestimmung der Verbundreaktion infolge von Relativverschiebungen lautet in allgemeiner Form

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad (5.17)$$

wobei die Materialtangente  $\mathbf{C}$  entsprechend des in Kapitel 4.2 erläuterten Materialmodells nach lokaler Iteration am Materialpunkt bestimmt wird.

Die der Gleichgewichtsbedingung mit Verbundspannungen  $\boldsymbol{\tau}$  und Randspannungen  $\mathbf{p}$

$$\boldsymbol{\tau} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (5.18)$$

für das Element nur näherungsweise entsprechende Arbeitsgleichung nach dem Prinzip der virtuellen Kräfte lautet in Weggrößenformulierung

$$-\delta A_{El} = \int \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{u} \, dA - \int \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \, dA \quad (5.19)$$

und kann unter Berücksichtigung der Transformationsvorschrift nach den Gleichungen (5.12) und (5.13) in lokalen und globalen Koordinaten aufgestellt werden, vgl. Kapitel 5.1. Für den Bezug auf die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  ist die Verknüpfung der Zustandsgrößen auf Materialebene mit den Zustandsgrößen auf Elementebene über die Hilfsmatrix  $\mathbf{B}$  anzuwenden, sodass die Randspannungen  $\mathbf{p}$  mit

$$\mathbf{p} = \mathbf{B}^T \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (5.20)$$

den Verbundspannungen  $\boldsymbol{\tau}$  und die Elastizitätsmatrix  $\mathbf{E}$  mit

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \quad (5.21)$$

der Materialtangente  $\mathbf{C}$  entsprechen.

Den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den Knotenweggrößen als Freiheitsgrade des Gesamtsystems stellt der Verschiebungsansatz in Matrixschreibweise mithilfe der Ansatzmatrix  $\mathbf{\Omega}$  entsprechend den auch für die Beschreibung der Elementgeometrie verwendeten Formfunktionen 5.5 her [AD17]. Für das flächige Interface-Element mit zusätzlich eingefügten Pseudoknoten ist bei vorangegangener Separierung der Verschiebungsanteile entsprechend Gleichung (5.16) dieser Zusammenhang sowohl für die realen Matricelementknoten als auch für die Pseudoknoten oder Faserelementknoten zu definieren, vgl. Kapitel 5.3. Daraus folgt die Ansatzmatrix für separierte Knotenpaare

$$\mathbf{H} = [\mathbf{\Omega} \quad -\mathbf{\Omega}]. \quad (5.22)$$

Für die separierten Knotenpaare des Interface-Elementes lautet der Verschiebungsansatz zur Umrechnung der Knotenweggrößen  $\mathbf{v}$  in Verschiebungen  $\mathbf{u}$  mit der Ansatzmatrix  $\mathbf{H}$  nach Gleichung (5.22)

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{v}. \quad (5.23)$$

In Analogie zu den wirklichen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  gilt für die virtuellen Verschiebungen der separierten Doppelknoten

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{v}. \quad (5.24)$$

Für ein zweidimensionales Element im dreidimensionalen Koordinatenraum mit den vier Doppelknoten zwischen Faser und Matrix, wie in Abbildung 5.2 dargestellt, ergibt sich die dreidimensionale Verschiebung an einem beliebigen Punkt  $P$

$$\mathbf{u}_P = [\mathbf{u}_{m,P} \quad \mathbf{v}_{m,P} \quad \mathbf{w}_{m,P} \quad \mathbf{u}_{f,P} \quad \mathbf{v}_{f,P} \quad \mathbf{w}_{f,P}]^T \quad (5.25)$$

aus den wahren 24 Knotenfreiwerten an den starr gekoppelten Faser- und Matrixknoten im Vektor  $\mathbf{v}$ , multipliziert mit der Ansatzmatrix  $\mathbf{H}$  für die Knotenpaare nach Gleichung (5.22) mit

$$\mathbf{\Omega}(\xi_P, \eta_P) = \begin{bmatrix} \phi_A & & \phi_B & & \phi_C & & \phi_D \\ & \phi_A & & \phi_B & & \phi_C & & \phi_D \\ & & \phi_A & & \phi_B & & \phi_C & \\ & & & \phi_B & & \phi_C & & \phi_D \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

für die Referenzkoordinaten  $\xi_P$  und  $\eta_P$  des Punktes  $P$  [AD17].

Mithilfe des Verschiebungsansatzes (5.23) lässt sich die Arbeitsgleichung (5.19) so umformulieren, dass die Knotenfreiwerte  $\mathbf{v}$  als einzige Unbekannte im Gleichungssystem verbleiben. Nach der Integration der Elementarbeiten über die Elementfläche ergibt sich die diskretisierte Arbeitsgleichung zu

$$-\delta A_{EI} = \delta \mathbf{v}^T \cdot \{\mathbf{K}_{EI} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{f}_{EI}\} \quad (5.27)$$

und ermöglicht das Herauslösen der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{EI}$  und des Elementlastvektors  $\mathbf{f}_{EI}$  für die Summe aller Arbeiten im Gesamtsystem nach Gleichung (5.1). Die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{EI}$  stellt den über die Elementfläche integrierten Verbundwiderstand in globalen

Koordinaten dar und folgt aus

$$\mathbf{K}_{\text{El}} = \int \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{lo}} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{H} \, dA \quad (5.28)$$

mithilfe eines numerischen Integrationsverfahrens. Analog dazu folgt der Elementlastvektor  $\mathbf{f}_{\text{El}}$  als Integral der resultierenden Verbundspannungen aus

$$\mathbf{f}_{\text{El}} = \int \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{lo}} \, dA. \quad (5.29)$$

Da die Separation der Knotenpaare unerheblich für die Integration der Verbundreaktion über die Elementfläche ist, liefert die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix mit

$$\mathbf{K}_{\text{El}} = \mathbf{B}_{\text{mod}}^T \cdot \int \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{C}_{\text{lo}} \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} \, dA \cdot \mathbf{B}_{\text{mod}} \quad (5.30)$$

mit einer um die Anzahl der Knotenfreiwerte vergrößerten Hilfsmatrix  $\mathbf{B}_{\text{mod}}$  dasselbe Ergebnis. Entsprechend kann der Elementlastvektor mit

$$\mathbf{f}_{\text{El}} = \mathbf{B}_{\text{mod}}^T \cdot \int \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\tau}_{\text{lo}} \, dA \quad (5.31)$$

bestimmt werden. Da die Knotenzuordnung der Pseudoknoten des Interface-Elementes zu den wahren Oberflächenknoten der Faserstrukturelemente ebenfalls außerhalb der Integration berücksichtigt werden soll, vgl. Kapitel 5.3, ist diese Berechnungsvariante zweckmäßig. Darüber hinaus ist eine höhere Effizienz des Berechnungsprogramms zu erwarten, wenn die numerische Integration der Elementsteifigkeitsmatrix mit einer geringeren Matrixgröße erfolgt.

Als numerisches Integrationsverfahren wird im Rahmen dieser Arbeit die GAUSS-LEGENDRE-Quadratur verwendet, die sich verschiedenen Untersuchungen zufolge gegenüber dem NEWTON-COTES-Verfahren oder dem GAUSS-LOBATTO-Verfahren hinsichtlich Genauigkeit und Berechnungsaufwand auszeichnet, vgl. [AD17], [Sd93], [DP94]. Für nähere Informationen zu den numerischen Integrationsverfahren sowie der Herleitung der Quadraturformeln wird auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen, vgl. z. B. [Bat02].

Die numerische Integration nach GAUSS erfolgt in den örtlichen Koordinaten des Referenzelementes und liefert für stetige Polynome mit der Summe der Funktionswerte an definierten Stützstellen den exakten Wert des Integrals [AD17]. Die Anzahl benötigter Stützstellen und ihre Lage im Referenzkoordinatensystem sind für beliebige zu integrierende Funktionen in Abhängigkeit ihrer Ordnung gegeben und können der Literatur entnommen werden [AD17]. Für das Volumenintegral einer Funktion  $f(\xi, \eta, \zeta)$  gilt mit numerischer Integration nach GAUSS mit  $n$  Stützstellen,

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \cdot w_i \cdot w_j \cdot w_k, \quad (5.32)$$

d. h. das Integral entspricht der Summe der Funktionswerte, multipliziert mit Wichtungsfaktoren  $w_i$ ,  $w_j$  und  $w_k$  zur Berücksichtigung des dreidimensionalen Einzugsbereiches der jeweiligen

Stützstelle [AD17]. Das tatsächliche Volumen des betrachteten Elementes

$$dV = dx dy dz = \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \quad (5.33)$$

kann mithilfe der Determinanten der JACOBI-Matrix ermittelt werden [ZFT14]. Da die JACOBI-Matrix des flächigen Interface-Elementes keine quadratische Matrix ist und damit keine Determinante gebildet werden kann, ist hier eine modifizierte Formulierung erforderlich. Die beiden zueinander orthogonalen Richtungsvektoren in der JACOBI-Matrix spannen einen Quadranten der Elementfläche auf. Das Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren ergibt den Normalenvektor, der als normierter Einheitsvektor  $\mathbf{n}_n$  entsprechend Gleichung (5.10) auch Teil der Transformationsmatrix nach Gleichung (5.11) ist. Die Länge des Vektors ohne seine Normierung, aufgestellt für einen Punkt  $P$  entsprechend einer der  $n$  Stützstellen, entspricht der Fläche des Parallelogramms zwischen den beiden Richtungsvektoren in der Elementebene und damit nach Multiplikation mit dem dimensionslosen Flächeninhalt  $A = 4$  des Referenzelementes dem gesuchten Flächeninhalt des Interface-Elementes. Damit folgt der tatsächliche Flächeninhalt des betrachteten Interface-Elementes mit

$$dA = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \eta} \right\|_2 d\xi d\eta \quad (5.34)$$

mit  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ , wobei die Norm des Normalenvektors für das unverzerrte Element aufgestellt wird und in jeder Stützstelle gleich groß ist. Erst durch die Multiplikation mit den Wichtungsfaktoren  $w$  wird das Einzugsgebiet der Stützstellen bestimmt. Analog dazu kann mit identischem Ergebnis auch die Determinante der um die Einheitsrichtungsvektoren der Koordinatenachsen zu einer quadratischen Matrix erweiterten JACOBI-Matrix bestimmt werden [ZFT14].

Die Diskretisierung der Arbeitsgleichung auf Elementebene liefert die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{El} = \mathbf{B}_{mod}^T \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{C}_{lo} \cdot \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot w_i \cdot w_j \cdot w_k \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \eta} \right\|_2 \right) \cdot \mathbf{B}_{mod} \quad (5.35)$$

und den Elementlastvektor

$$\mathbf{f}_{El} = \mathbf{B}_{mod}^T \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\tau}_{lo} \cdot w_i \cdot w_j \cdot w_k \cdot \left\| \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \xi} \times \frac{\partial \mathbf{x}_P}{\partial \eta} \right\|_2 \right) \quad (5.36)$$

nach numerischer Integration nach GAUSS.

Das beschriebene Interface-Element eignet sich nur für die Simulation von kleinen Relativbewegungen in der Kontaktzone. Die für die Faserauszugsimulation notwendige Erweiterung dieser Formulierung wird in Kapitel 5.3 vorgestellt und ermöglicht durch eine adaptive Kontaktfeststellung die numerische Analyse großer Relativverschiebungen in der Kontaktzone.

### 5.2.3 Verifikation des Verbundmodells

In Kapitel 4.1 sind einige Ansätze zur analytischen Lösung des Faserauszugproblems dargestellt. Zur qualitativen Verifikation des entwickelten Verbundmodells werden die analytischen Näherungslösungen von MUKI & STERNBERG nach Abbildung 4.2 und von SLAUGHTER & SANDERS entsprechend der Abbildung 4.3 herangezogen. Beide Modelle beschreiben das Fa-



serauszugproblem für einen teilweise eingebetteten Stab unter einer Krafteinwirkung in einen unendlich ausgedehnten, elastischen Halbraum, vgl. [MS70], [SS91]. Im Folgenden wird ein FE-Modell erstellt und für eine Krafteinwirkung an der Faserspitze ausgewertet. Der Vergleich des Zugspannungsverlaufs in der Faser entlang der Verbundzone für diese Modelle ermöglicht die Verifizierung des Verbundmodells hinsichtlich der Beschreibung von starrem Verbund.

In Analogie zu den analytischen Lösungen in Kapitel 4.1 wird mithilfe des FE-Modells die Kraftübertragung im starren Verbund untersucht. Dafür wird eine Faser mit einem Radius von  $r_f = 0,1 \text{ mm}$  und einer Einbindelänge von  $\ell_e = 10 \cdot r_f = 1 \text{ mm}$  in eine Matrix eingebettet und mit einer NEUMANN'schen Kraftrandbedingung von  $p_z = 10 \text{ N/mm}^2$  an ihrer Spitze in einem Abstand von  $\ell_a = 0,1 \cdot \ell_e = 0,1 \text{ mm}$  zur Matrixoberfläche in einem Zeitschritt belastet. Einem elastischen Halbraum näherungsweise entsprechend, beträgt der modellierte Matrixradius mindestens  $r_m = 5 \text{ mm}$ , was dem Fünzfzigen des Faserradius entspricht und den üblichen Einflussbereich einer Faser deutlich überschreitet, vgl. Abbildung 5.3. Darüber hinaus ist die Matrix an ihren seitlichen Oberflächen mithilfe von homogenen DIRICHLET-Randbedingungen in Faserlängsrichtung unverschieblich gelagert. Unterhalb des eingebetteten Faserendes wird eine Matrixhöhe von  $h_m - \ell_e = \ell_e = 1 \text{ mm}$  modelliert, an deren Unterseite ebenfalls eine unverschiebliche Festhaltung vorgesehen wird. Die doppelte Achsensymmetrie des Faser-Matrix-Verbundes wird mit Berücksichtigung von Symmetrierandbedingungen ausgenutzt, sodass das Berechnungsmodell auf ein Viertel des Faser-Matrix-Verbundes reduziert werden kann, vgl. Abbildung 5.3.

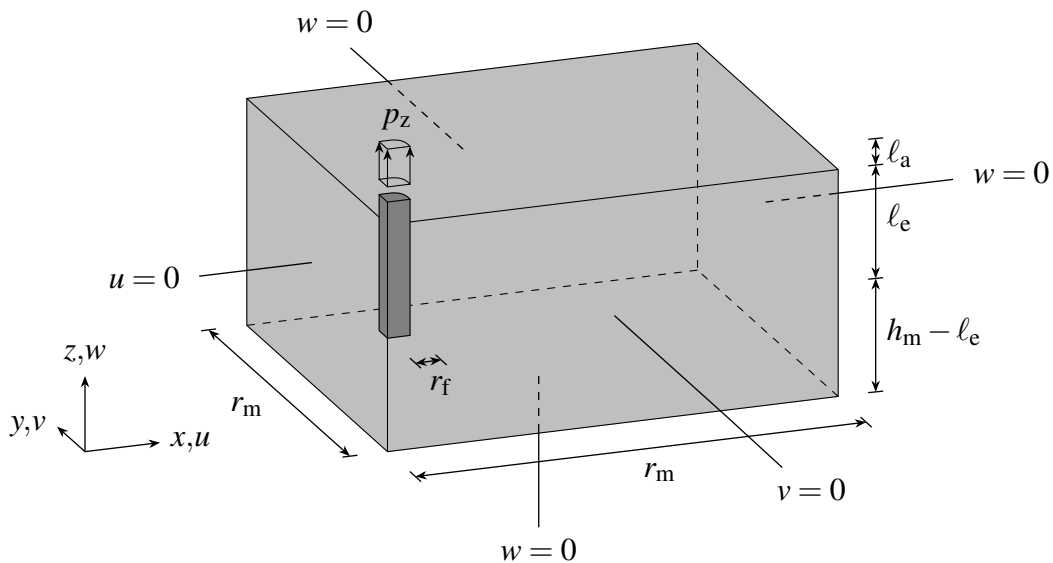


Abbildung 5.3: Abmessungen und Randbedingungen des Berechnungsmodells zur Kraftübertragung im starren Verbund

Den analytischen Näherungslösungen entsprechend, wird linear-elastisches Materialverhalten nach HOOKE angenommen, wobei wie bei MUKI & STERNBERG für die Faser ein Elastizitätsmodul von  $E_f = 100000 \text{ N/mm}^2$  und eine Querdehnzahl von  $\nu_f = 1/3$  und für die Matrix ein Elastizitätsmodul von  $E_m = 50000 \text{ N/mm}^2$  und eine Querdehnzahl von  $\nu_m = 1/4$  gewählt wird, vgl. [MS69b]. Damit entspricht das Steifigkeitsverhältnis zwischen Matrix und Faser mit  $E_f/E_m = 2$  den Modellannahmen, wie in Kapitel 4.1 erläutert.

Die Verbundzone wird mit isoparametrischen „Zero-Thickness“-Interface-Elementen mit linearen Ansatzfunktionen entsprechend der in diesem Kapitel 5.2 erläuterten Formulierung diskretisiert. In zwei Diskretisierungsvarianten werden unterschiedliche Netzfeinheiten im Vergleich ausgewertet. Darüber hinaus wird das FE-Modell in einer zusätzlichen Variante so verändert, dass die Kraftübertragung in der Grenzschicht durch eine starre Kopplung zwischen Faser und Matrix erfolgt anstatt mithilfe von Verbundzonenelementen. Um auch bei der Verwendung der „Zero-Thickness“-Interface-Elemente in Verbindung mit dem entwickelten Materialmodell nach Kapitel 4.2 einen quasi-starren Verbund zu generieren, wird den Verbundzonenelementen eine sehr hohe Verbundsteifigkeit von  $E_r = f_r/s_c > 1\,000\,000\text{ N/mm}^3$  zugewiesen.

In der folgenden Abbildung 5.4 sind die Verläufe der Zugspannungen  $\sigma_{zz,f}$  in Fasermitte entlang der bezogenen Einbindelänge und normiert auf die Zugspannung  $\sigma_{zz,f}|_{\zeta=0}$  in Höhe des Faseraustrittsortes als nahezu übereinstimmende Ergebnisse der drei untersuchten Varianten dargestellt. Ebenfalls abgebildet sind die Spannungsverläufe nach den analytischen Näherungslösungen von MUKI & STERNBERG sowie SLAUGHTER & SANDERS [MS70],[SS91], vgl. Kapitel 4.1. Der qualitative Verlauf der analytischen Näherungslösungen wird mit allen Modellvarianten passend wiedergegeben. Die geringfügigen Abweichungen der absoluten Spannungswerte und der Spannungsverläufe ist gegebenenfalls auch auf die vereinfachte Ermittlung der Knotenspannungen innerhalb des institutseigenen FE-Programms zurückzuführen, vgl. Kapitel 5.1. Im rechten Diagramm in Abbildung 5.4 ist die jeweils zugehörige normierte Verschiebung  $w_f$  der Fasermitte in  $z$ -Richtung über die bezogene Einbindelänge der Faser angegeben. Der Verlauf der Verschiebungen entspricht den Erwartungen, kann jedoch mangels entsprechender analytischer Lösungen nicht verifiziert werden.

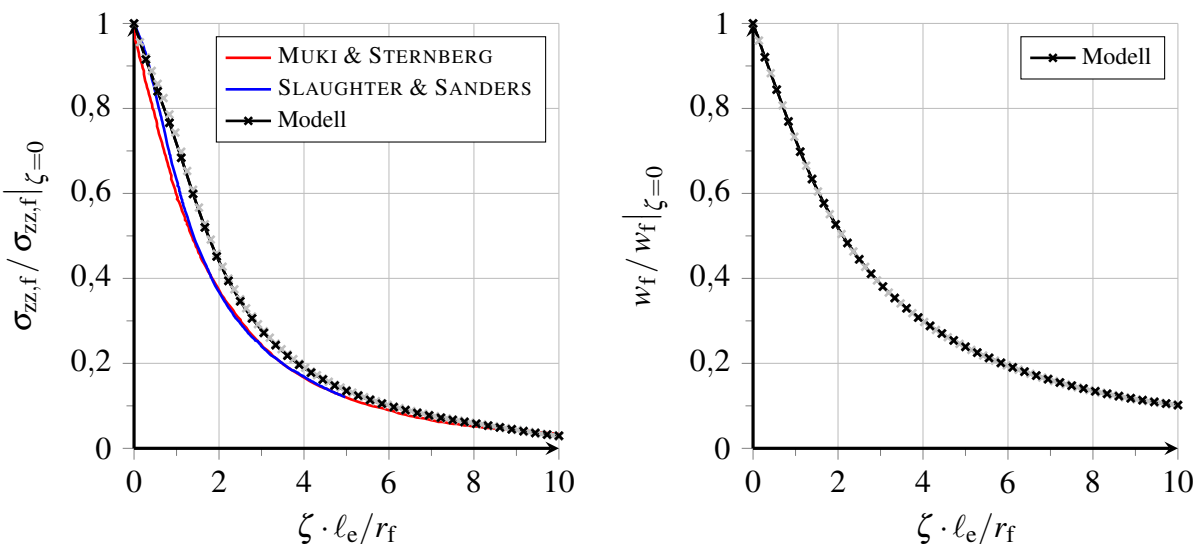


Abbildung 5.4: Analytische und numerische Näherungslösungen des normierten Verlaufes der Zugspannungen und Verschiebungen in Fasermitte

Wie in Abbildung 4.2 dargestellt, ist der Verlauf der Faserzugspannung entlang der Faserachse bei starrem Verbund weitestgehend unabhängig von der Einbindelänge als die maximal verfügbare Verbundlänge. Für das vorliegende Verhältnis von Faser- und Matrixsteifigkeit werden bei starrem Verbund mehr als 80 % der einwirkenden Last über eine Verbundlänge von etwa  $\ell_b = 4 \cdot r_f$  in die Matrix eingeleitet. Abweichende Steifigkeitsverhältnisse führen entsprechend der

veränderten Beteiligung der beiden Komponenten auf steilere oder flachere Zugspannungsverläufe und damit auf verkürzte oder verlängerte wirksame Lasteinleitungsbereiche, vgl. Abbildung 4.2. Zu beachten ist dabei, dass die Ausbildung eines idealen Lasteinleitungsbereiches gemäß diesen Untersuchungen sowohl perfekten vollflächigen Verbund als auch eine ausreichend große mitwirkende Matrixumgebung voraussetzt.

Neben der Übertragung von Zugspannungen ist die Fasertragwirkung auch durch die dehnungsbehindernde Versteifung der Matrix gekennzeichnet. Als Ergebnis theoretischer Überlegungen sind in Kapitel 3.2 in Abbildung 3.5 die Verläufe der Spannungen und Dehnungen des Faser-Matrix-Verbundes über den Radius  $r$  dargestellt. Mithilfe eines FE-Modells wird im Folgenden die analytische Lösung aus Kapitel 3.2 überprüft.

Das FE-Modell zur Beschreibung der Fasertragwirkung bei einer gleichförmigen Volumenverkleinerung der Matrix beschreibt eine vollständig eingebettete Faser, vgl. Abbildung 5.5. Neben Symmetrierandbedingungen werden an jeder freien Matrixseite Randbedingungen gewählt, die eine gleichförmige Volumenverkleinerung mit  $\epsilon_{rr,0} = \epsilon_{zz,0} = -0,0001$  des Faser-Matrix-Verbundes beschreiben, vgl. Kapitel 3.2 und Abbildung 3.4. Die Abmessungen des Geometriemodells in diesem Beispiel sind an das erste Verifikationsbeispiel, dargestellt in Abbildung 5.3, angelehnt, vgl. Abbildung 5.5.

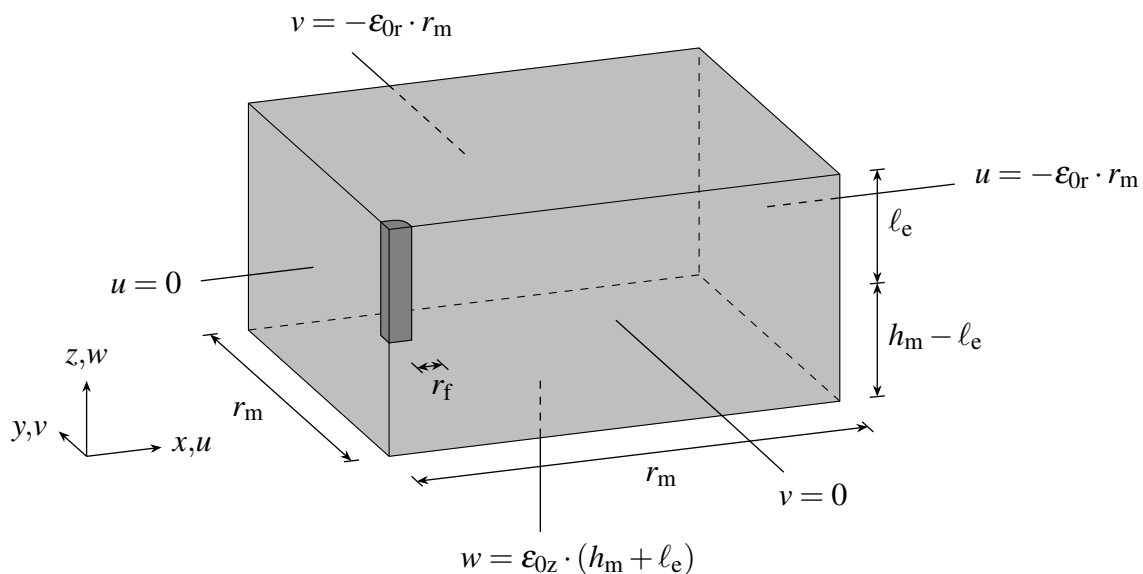


Abbildung 5.5: Abmessungen und Randbedingungen des Berechnungsmodells zur dehnungsbehindernden Faserwirkung

Die Materialparameter werden entsprechend den Annahmen für die theoretischen Überlegungen in Kapitel 3.2 gewählt, d. h. die Faser wird mit dem Elastizitätsmodul  $E_f = 200\,000\text{ N/mm}^2$  und der Querdehnzahl  $\nu_f = 0,3$  charakterisiert, während der Matrix mit  $E_m = 50\,000\text{ N/mm}^2$  und  $\nu_m = 0,2$  für den Werkstoff Beton übliche Materialparameter zugewiesen werden. Es wird vereinfachend linear-elastisches Materialverhalten nach HOOKE angenommen, vgl. Kapitel 3.2. Die Verbundzone ist wie im vorigen Beispiel mit einer hohen Verbundsteifigkeit quasi-starr.

Die Ergebnisse der theoretischen Überlegungen aus Kapitel 3.2 sind in der folgenden Abbildung 5.6 in Graustufen hinterlegt, vgl. Abbildung 3.5. Im Vergleich dazu sind in Abbildung 5.6 die

Faser- und Matrixspannungen und -dehnungen an den Knoten des FE-Modells dargestellt. Die gute Übereinstimmung des Spannungs-Deformations-Zustandes um die Verbundzone bestätigt die theoretischen Überlegungen zur Versteifungswirkung der Fasern in der Betonmatrix.

Die geringfügigen Abweichungen der numerischen Ergebnisse in den Übergangsbereichen zwischen Faser und Matrix sind auf die Diskontinuität der Materialsteifigkeit im Bereich der Kontaktzone zurückzuführen, wobei insbesondere das scharfkantige Faserende eine numerisch unzureichend beschriebene Singularitätsstelle darstellt. Der aus der dehnungsbehindernden Faserwirkung resultierende Spannungs-Deformations-Zustand in Fasermitte ist infolge dieser Diskontinuität nur näherungsweise konstant über die Einbindelänge und in geringem Maße kleiner als im Rahmen der theoretischen Überlegungen infolge einer gleichförmigen Volumenverkleinerung von Faser und Matrix angenommen. Der Einfluss der Singularitätsstelle nimmt dabei mit zunehmender Entfernung vom eingebetteten Faserende ab. So wird mit der Faserdruckspannung in Höhe von  $\sigma_{zz,\max} = -26,5 \text{ N/mm}^2$  der theoretisch ermittelte Wert  $\sigma_{zz,f} = -27,4 \text{ N/mm}^2$  geringfügig unterschritten, vgl. Abbildung 5.6. Die Kontaktpressung entlang der eingebetteten Faser ist ebenfalls nur näherungsweise konstant und wächst von  $\sigma_{rr,\min} = -12,4 \text{ N/mm}^2$  am Faseraustrittsort auf  $\sigma_{rr,\max} = -12,7 \text{ N/mm}^2$  im Bereich des eingebetteten Faserendes an und übersteigt damit geringfügig die theoretisch ermittelte Kontaktpressung von  $\sigma_{rr}(r = r_f) = -12,4 \text{ N/mm}^2$ , die der Verbundnormalspannung  $\tau_n$  entspricht, vgl. Kapitel 3.2. Abgesehen von numerischen Einflüssen ist das entwickelte FE-Modell jedoch in der Lage, die dehnungsbehindernde Faserwirkung realistisch abzubilden.

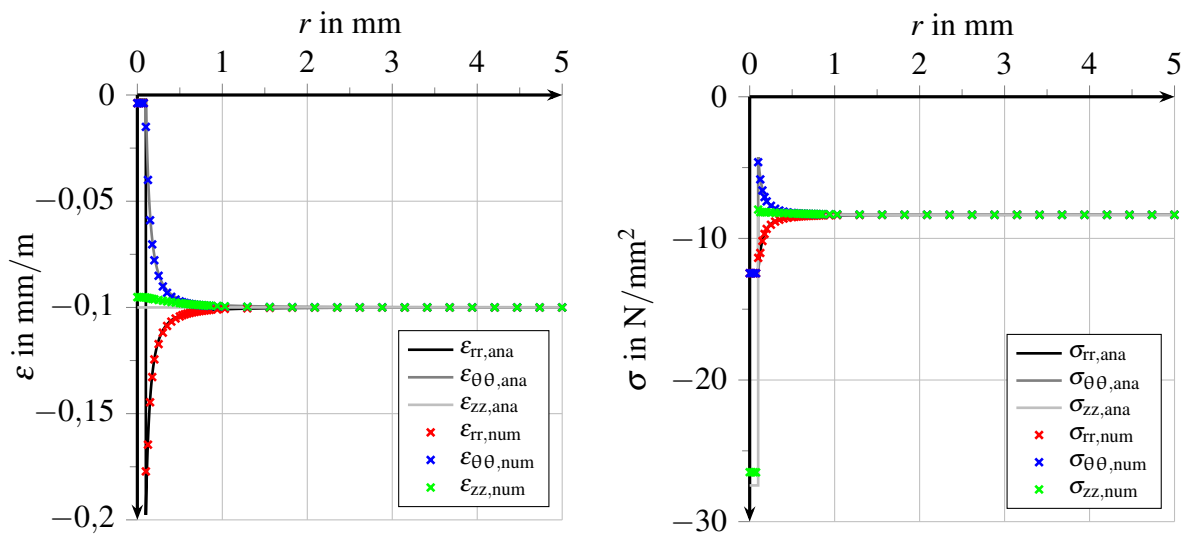


Abbildung 5.6: Dehnungs- und Spannungsverläufe über den Radius von Faser und Matrix bei starrem Verbund für eine Volumenverkleinerung von  $\varepsilon_{rr,0} = \varepsilon_{zz,0} = 0,1 \text{ mm/m}$

Der nichtlineare Verlauf der Spannungen und Dehnungen über den Radius der Matrix in Abbildung 5.6 gibt darüber hinaus Aufschluss über den Anteil der Matrix, der durch die dehnungsbehindernde Faserwirkung beeinflusst wird. Die lokale Störung des Spannungs-Deformations-Zustandes der Matrix durch die eingebettete Faser mit einem Radius von  $r_f = 0,1 \text{ mm}$  ist demnach in etwa 1 mm Entfernung weitestgehend abgeklungen, vgl. Abbildung 5.6. Für das vorliegende Steifigkeitsverhältnis im starren Faser-Matrix-Verbund ist daher mindestens ein Matrixradius in Höhe des zehnfachen Faserradius erforderlich, um die aus der lokalen Inhomogenität einer eingebetteten Faser resultierenden Zwänge abzubauen. Da die größtmögliche Kraftübertragung

im Faser-Matrix-Verbund bei starrer Verbindung der Komponenten erfolgt, ist eine Ausweitung der Matrixtragwirkung bei und nach dem Übergang in den verschieblichen Verbund nicht zu erwarten. Für die folgenden numerischen Untersuchungen können in Anlehnung an die Ergebnisse in Abbildung 5.6 auch kleinere Ausschnitte aus dem geometrischen Halbraum gewählt und unter Berücksichtigung der erforderlichen Wegrandbedingungen an den Grenzen des Ausschnittes diskretisiert werden.

### 5.3 Erweiterung für den verschieblichen Verbund

Das Faserauszugproblem zeichnet sich beginnend mit der Überwindung der initialen Verbundfestigkeit durch eine veränderliche Verbundlänge zwischen Faser und Matrix aus. Der ständig variierende Kontakt zwischen den Strukturen erfordert eine variable Modellierung der Geometrie. In der Literatur liegen bislang nur wenige numerische Untersuchungen des Faserauszugverhaltens bei einem vollständigen Auszug der Faser aus einer Matrix vor, vgl. z. B. [LMA10], [GNG<sup>+</sup>20], [FW16], [CY15], [KKLB14], häufig basierend auf Modellierungsansätzen zur Beschreibung des Verbundverhaltens von geripptem Bewehrungsstahl und Beton, welches experimentell und numerisch bereits bei minimalen Relativverschiebungen ausgewertet wird, vgl. z. B. [MDS16], [LZN15], [Lun05], [Aue14]. Dabei sind Ansätze zur Beschreibung des variablen Kontaktes zwischen Faser und Matrix mit Interface-Elementen oder Bond-Link-Elementen mit veränderlicher Vernetzung oder lokaler Kontaktauswertung für die Beschreibung des Verbund- und Delaminationsverhaltens im Rahmen der Kontinuumsmechanik und auch der Bruchmechanik vorhanden, vgl. z. B. [IGGS85], [GG85], [Vil96], [FQH<sup>+</sup>15], [CDR<sup>+</sup>15], [PW16], [Höw20], [Bay20].

Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete „Zero-Thickness“-Interface-Element ist ein flächiges Verbundelement im Kontaktbereich von zwei Strukturen, das in Abhängigkeit der dreidimensionalen Relativverschiebung zwischen den Kontaktoberflächen eine Verbundreaktion überträgt, vgl. Kapitel 5.2. Zur Berücksichtigung großer Relativverschiebungen wird speziell für diese Interface-Elemente ein Kontaktalgorithmus entwickelt, der als Grundidee einen Interpolationsansatz verfolgt. Das grundlegende Konzept des entwickelten Algorithmus zur Berücksichtigung großer Relativverschiebungen wird im Folgenden im Bezug auf das im Rahmen dieser Arbeit verwendete flächige Interface-Element vorgestellt. Ein kurzer Ausblick auf potenzielle Erweiterungsmöglichkeiten dieses Ansatzes rundet die Beschreibung des Elementkonzeptes ab. Im Rahmen der Verifizierung des entwickelten Verbundmodells wird auf die Grenzen des Geometriemodells hingewiesen und die Beschreibung der Kontaktzonenrissbildung anhand der grundlegenden Rissöffnungsarten der Bruchmechanik nachvollzogen.

#### 5.3.1 Algorithmus zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung

Die dreidimensionale Relativverschiebung als Eingangsgröße für die Bestimmung der Verbundreaktion wird innerhalb der Knotenpaare des „Zero-Thickness“-Interface-Elementes ermittelt, vgl. Kapitel 5.2. Dabei ist je einer der Knoten identisch mit einem Oberflächenknoten der Matrixstruktur, d. h. es herrscht eine starre Kopplung zwischen den Strukturelementen der Matrix und den Interface-Elementen. Der andere Knoten eines jeden Knotenpaares wird als virtueller Pseudoknoten bezeichnet und besitzt keine im Gesamtsystem existierenden Freiheitsgrade. Erst mit der Zuordnung zu den Knoten der Faseroberfläche wird die Auswertung der Verbundreaktion zwischen den Strukturen ermöglicht.

Während bei starrem Verbund mit passender Vernetzung jeweils ein Oberflächenknoten der Faser genau einem Pseudoknoten zugeordnet werden kann, stellen die virtuellen Interface-Element-Knoten bei verschieblichem Verbund eine orthogonale Projektion der Oberflächenknoten der Matrix auf die Faseroberfläche dar und befinden sich im Allgemeinen zwischen den umliegenden Oberflächenknoten der Faser, vgl. Abbildung 5.7. Bei einer teilweisen Ablösung der Faser von der Matrix treten die Phasen des starren und des verschieblichen Verbundes zeitgleich entlang der Einbindelänge der Faser auf, vgl. Kapitel 3.3. Das macht die Entwicklung eines Algorithmus zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung auf Elementebene erforderlich.

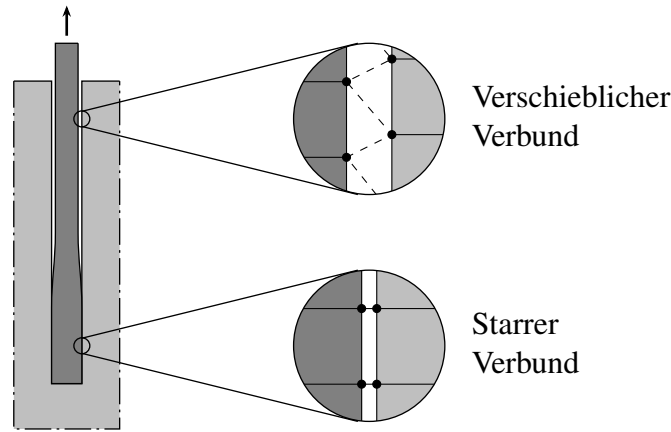


Abbildung 5.7: Kontakt und Knotenzuordnung in unterschiedlichen Verbundphasen

Während mit der Hilfsmatrix  $\mathbf{B}$  respektive  $\mathbf{B}_{\text{mod}}$  nach Gleichung (5.16) der Zusammenhang zwischen Relativverschiebungen  $\boldsymbol{\delta}$  und den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  der Komponenten bekannt ist und mithilfe der Ansatzmatrix  $\boldsymbol{\Omega}$  entsprechend Gleichung (5.23) die Bestimmung von Verschiebungen  $\mathbf{u}$  in Abhängigkeit der Knotenweggrößen  $\mathbf{v}$  erfolgt, vgl. Kapitel 5.2, ist für die Beschreibung des verschieblichen Verbundes mit großen Relativverschiebungen die Definition einer weiteren Zuordnungsmatrix erforderlich. Diese stellt den Zusammenhang zwischen den virtuellen Knotenfreiheitsgraden  $\mathbf{v}_{\text{EI}}$  des Interface-Elementes einschließlich der Pseudoknoten und den wirklichen Knotenfreiheitsgraden  $\mathbf{v}_{\text{Sy}}$  des Gesamtsystems her, sodass die Transformation der Knotenweggrößen je Interface-Element mit

$$\mathbf{v}_{\text{EI}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_{\text{Sy}} \quad (5.37)$$

erfolgen kann. Die Einträge der Zuordnungsmatrix  $\mathbf{M}$  stellen entsprechend des Interpolationsansatzes Wichtungsfaktoren dar, die basierend auf der Lage des Pseudoknotens in der Faseroberfläche bestimmt werden. Die Summe der Elementararbeiten (5.27) lässt sich bei Berücksichtigung der Zuordnungsmatrix nach (5.37) schreiben als

$$-\delta A_{\text{EI}} = \mathbf{M}^T \cdot \delta \mathbf{v}_{\text{Sy}}^T \cdot \{ \mathbf{K}_{\text{EI}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{v}_{\text{Sy}} - \mathbf{f}_{\text{EI}} \}. \quad (5.38)$$

Analog zur Separation der Knotenpaare des Interface-Elementes kann auch die Zuordnung zwischen den Elementknoten und den wirklichen Systemknoten an die Integration der Verbundreaktion über die Elementfläche anschließend und vor dem Einsortieren der Elementsteifigkeitsmatrix

und des Elementlastvektors in das Gesamtgleichungssystem mit

$$\mathbf{K}_{EI} = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{K}_{El} \cdot \mathbf{M} \quad (5.39)$$

und

$$\mathbf{f}_{EI} = \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{f}_{El} \quad (5.40)$$

vorgenommen werden. Durch seine Allgemeingültigkeit ist dieses Vorgehen prinzipiell für beliebige Elementtypen und -geometrien anwendbar. Auch hinsichtlich der Komplexität des Materialmodells für die Verbundzone ergeben sich bei Anwendung dieses Konzeptes mit virtuellen Pseudoknoten keine Einschränkungen. In Abhängigkeit des Interpolationsansatzes kann die Knotenzuordnung hingegen auch unphysikalische Umlagerungseffekte hervorrufen, die im folgenden Kapitel näher untersucht werden.

Die Feststellung von Kontakt beinhaltet auch die Feststellung von Kontaktverlust. Dieser ist auf der Grundlage der Zuordnungsmatrix definiert, d. h. wenn eine Zuordnung aller Interface-Element-Knoten zu den Faseroberflächenknoten möglich ist, herrscht vollflächiger Kontakt zwischen dem angrenzenden Matricelement und der Faser. Scheitert die Knotenzuordnung, weil die Faseroberfläche gegenüber dem jeweiligen Interface-Element zu weit verschoben ist, wird das Interface-Element infolge des fehlenden Kontaktes deaktiviert. In der Folge wird mit diesem deaktivierten Verbundelement keine Verbundreaktion transferiert und keine Verbundsteifigkeit in das System eingetragen. Die Spannungen des letzten Beanspruchungsinkrementes werden elastisch abgebaut, während inelastische Verzerrungen und Schädigung verbleiben.

Durch die starre Kopplung der Interface-Elemente an die Matrixoberfläche ergibt sich aber auch der Vorteil, dass der Spannungs-Deformations-Zustand und der Schädigungszustand des Verbundzonenmaterials unabhängig von der aktuellen Lage der Faser direkt an der Oberfläche des Faserkanals gespeichert wird. Damit ist beispielsweise auch eine erneute Aktivierung von Interface-Elementen bei entgegengesetzter Verschiebung der Faser möglich. Der Kontaktalgorithmus ermöglicht die Bestimmung der Verbundreaktion am verformten System, womit gewährleistet wird, dass die Verzerrungen in den Interface-Elementen klein bleiben und die Kraftübertragung durch die Verbundwirkung nur im tatsächlichen Kontaktbereich erfolgt. Während der Lösung des geometrisch nichtlinearen globalen Gleichungssystems mithilfe des inkrementell-iterativen NEWTON-RAPHSON-Verfahrens wird die Zuordnungsmatrix  $\mathbf{M}$  in jedem Iterationsschritt basierend auf der aktualisierten Lage der verschobenen Strukturen neu aufgestellt. Neben einem erhöhten numerischen Berechnungsaufwand folgt daraus, dass die Größe der Zuordnungsmatrix  $\mathbf{M}$  variabel ist, beteiligte Knoten der Faseroberfläche also von Iterationsschritt zu Iterationsschritt wechseln, hinzukommen oder verschwinden können und die Deaktivierung des Interface-Elementes bei Kontaktverlust wiederholt festgestellt oder rückgängig gemacht werden muss.

Demgegenüber führt die innerhalb der globalen Iteration wiederholte Aufstellung der Zuordnungsmatrix zu einer schnellen Konvergenz der Lösung. Da sich mit der Lage der Faser die Relativverschiebungen als Eingangsgrößen für das Materialmodell der Verbundzone ändern, fällt die Verbundreaktion zunächst in jedem Iterationsschritt anders aus, sodass bei physikalisch nichtlinearem Materialverhalten eine signifikant abweichende Elementsteifigkeitsmatrix ermittelt wird. Die Nachgiebigkeit der Verbundzone bestimmt wiederum die Lage der Faser in der Matrix. Das geometrisch und physikalisch nichtlineare Faserauszugproblem ist demnach hochgradig komplex und nicht mehr analytisch lösbar. Mithilfe des im Rahmen dieser Arbeit gewählten

NEWTON-RAPHSON-Verfahrens kann dennoch eine stabile Konvergenz der Näherungslösung erreicht werden.

Die orthogonale Projektion eines Interface-Element-Knotens, der gleichzeitig Teil der Matrixoberfläche ist, auf die Faseroberfläche dient der Lagebestimmung des zugehörigen virtuellen Pseudoknotens. Erst mit der genauen Position des Pseudoknotens kann sein Verschiebungszustand und damit die dreidimensionale Relativverschiebung innerhalb des Knotenpaares ermittelt werden. Die Projektion erfolgt im verformten Zustand, d. h. unter Berücksichtigung der aktuellen Verschiebungslösung im aktuellen Zeitschritt oder Beanspruchungszinkrement. Alternativ wäre auch das Ansetzen des letzten ausiterierten Verformungszustandes denkbar. Demgegenüber stellt die Berücksichtigung des aktuellen Verschiebungszinkrementes das Gleichgewicht unter Einhaltung der Verformungsbedingung zum Ende des Inkrementes oder Zeitschrittes sicher, sodass deaktivierte Interface-Elemente keinen Verbundwiderstand aufweisen und die Verbundreaktion auf Basis der aktuellen Kontaktfläche übertragen wird. Die Größe der Verschiebungszinkmente spielt dabei nur eine untergeordnete Rolle, sofern die Dehnsteifigkeit der Faser ausreichend groß ist gegenüber der Nachgiebigkeit der Verbundzone, d. h. solange sich die Verschiebung der Faser zwischen benachbarten Knoten nur geringfügig unterscheidet.

Die Projektionsrichtung wird mithilfe des Normalenvektors auf dem jeweiligen Interface-Element-Knoten bestimmt. Dabei müssen einerseits Wegrandbedingungen als natürliche Begrenzung der Projektionsfläche, z. B. Symmetrierandbedingungen, und andererseits die bei linearen Ansatzfunktionen zur Beschreibung der Elementgeometrie auftretenden Knicke an den Elementübergängen berücksichtigt werden, vgl. Abbildung 5.8. Der Normalenvektor entspricht daher dem arithmetischen Mittel derjenigen Normalenvektoren, die basierend auf der Elementgeometrie der an den betrachteten Interface-Element-Knoten angrenzenden Elemente mithilfe der JACOBI-Matrix analog zu Gleichung (5.10) ermittelt werden können, und ist auf eine Länge von 1 normiert. Die JACOBI-Matrix wird hier entsprechend der initialen Elementform mit den Knotenkoordinaten ohne Berücksichtigung der Verschiebung ermittelt. Alternativ wäre auch die Berücksichtigung des verformten Zustandes denkbar und führt bei einem gewöhnlichen Faserauszug mit kleinen Verzerrungen der die Verbundzone umgebenden Strukturen auf dasselbe Ergebnis. Die entsprechend des Initialzustandes orthogonale Projektion stellt darüber hinaus eine gleichmäßige Verteilung der Verbundsteifigkeit sicher und wird daher im Rahmen dieser Arbeit bevorzugt.

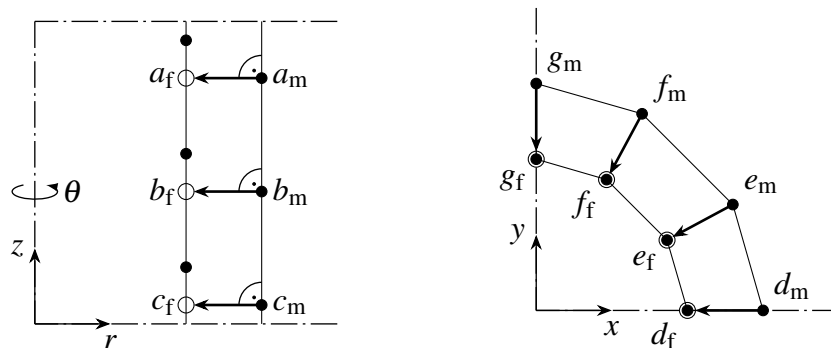


Abbildung 5.8: Orthogonale Projektion der Matrixknoten auf die Faseroberfläche

Die Lage eines Pseudoknotens innerhalb einer Elementoberfläche der Faserstruktur kann wie für jeden beliebigen anderen Punkt innerhalb des Elementes mithilfe der Formfunktionen be-



schrieben werden. Die Ansätze zur Beschreibung der Elementgeometrie, zusammengefasst im Vektor  $\mathbf{N}$  und ausgewertet für einen im Referenzkoordinatensystem bekannten Punkt  $P$ , ergeben nach Gleichung (5.7) bei Multiplikation mit den globalen Koordinaten der Elementknoten  $\mathbf{\bar{X}}$  die gesuchten globalen Koordinaten  $\mathbf{x}_P$  Punktes  $P$ . Mit den bekannten globalen Koordinaten des zu projizierenden Interface-Element-Knotens  $\mathbf{x}_I$  und der Projektionsrichtung  $\mathbf{n}_n$  sind weitere Informationen zur Bestimmung der Lage des Pseudoknotens  $P$  innerhalb der Faserelementoberfläche gegeben. Durch die Verknüpfung dieser Informationen können schließlich die gesuchten Koordinaten  $\mathbf{x}_P$  des Pseudoknotens bestimmt werden, vgl. Gleichung (5.41).

Vor der orthogonalen Projektion der Interface-Element-Knoten auf die Faseroberfläche ist für jeden zu projizierenden Knoten die gegenüberliegende Faserelementfläche zu identifizieren. Die Kenntnis der Elementknotenkoordinaten des gegenüberliegenden Faserelementes ist eine wichtige Voraussetzung für die schnelle und korrekte Bestimmung der Lage der Pseudoknoten. Dafür werden im Rahmen dieser Arbeit zunächst für jeden Interface-Element-Knoten die nächstgelegenen Knoten auf der Faseroberfläche gesucht und hinsichtlich ihrer Elementkonnektivität untersucht, sodass zumeist mehrere Elemente mit potenziellem Kontakt zum jeweiligen Verbundelement gefunden werden. Zur Verbesserung der Robustheit der Knotenzuordnung wird die Anzahl der berücksichtigten nächstgelegenen Knoten auf der Faseroberfläche in Abhängigkeit der Elementgeometrie und der Ansatzordnung bestimmt. Das Verhältnis der Elementkantenlängen zueinander und die Anzahl der Stützpunkte für die numerische Integration nach GAUSS sind die zu bestimmenden mathematischen Kenngrößen des Interface-Elementes, nach denen die Anzahl der berücksichtigten Knoten auf der Faseroberfläche ermittelt wird. Alle Faserelemente, die an mehreren dieser Knoten angrenzen, werden nach ihrer Kontaktwahrscheinlichkeit sortiert und zur Überprüfung der Schnittpunktkoordinaten vorgehalten. So kann sichergestellt werden, dass der Suchalgorithmus auch bei länglichen Elementoberflächengeometrien mit unterschiedlich langen, orthogonalen Elementkanten das einem Interface-Element-Knoten gegenüberliegende Faserelement erfolgreich identifiziert. Insbesondere in den Rand- und Eckbereichen der modellierten Verbundzone ist eine präzise Lokalisierung der dem jeweiligen Interface-Element-Knoten gegenüberliegenden Faserelementoberfläche von großer Bedeutung, um eine vorzeitige Deaktivierung einzelner Interface-Elemente zu umgehen. Der vorgestellte Suchalgorithmus erweist sich hier als zuverlässig und ausreichend robust.

Wenn der Abstand zwischen Interface-Element-Knoten und Faserknoten unterhalb eines definierten Grenzwertes liegt, entspricht dieser Faserknoten näherungsweise dem zum Interface-Element-Knoten zugehörigen Pseudoknoten, vgl. Abbildung 5.7. Für die Knoten eines Interface-Elementes können verschiedene Faserelemente als gegenüberliegend identifiziert und im Rahmen des Kontaktalgorithmus für die Zuordnung zwischen Pseudoknoten und Faserelementknoten verwendet werden. In der Regel ergeben sich mehrfache Beteiligungen von Faserknoten an der Übertragung der Verbundreaktion eines Interface-Elementes, was bei der Aufstellung der Zuordnungsmatrix  $\mathbf{M}$  berücksichtigt werden muss. Die Bestimmung der Einträge der Zuordnungsmatrix kann bei einem entsprechenden Abgleich mit den bereits gefundenen, beteiligten Faserknoten je Interface-Element, im Folgenden als aktive Knoten bezeichnet, knotenweise erfolgen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden dreidimensionale Strukturelemente für die Modellierung der Faser verwendet, auf deren zur Matrix hin ausgerichteten Oberflächen die Interface-Element-Knoten projiziert werden. Zunächst ist daher für das dem jeweiligen Interface-Element-Knoten gegenüberliegende Faserelement festzustellen, welche Elementoberfläche der Matrix zugewandt ist. Diese Information ist mit der Netzgenerierung bekannt. Daraus ergibt sich eine der drei

Koordinaten des gesuchten Punktes  $P$  im Referenzkoordinatensystem zu 1 oder  $-1$ . Unbekannt sind neben den globalen Koordinaten des Punktes  $P$  die beiden übrigen Referenzkoordinaten und der Abstand  $r$  zu demjenigen Interface-Element-Knoten, der zur Kontaktfeststellung verwendet wird. Der Abstand wird vorzeichengerecht entsprechend dem Normalenvektor der Interface-Element-Oberfläche ermittelt. Der Normalenvektor weist üblicherweise von der Faser weg, um entsprechend der Vorzeichendefinition im Materialmodell, vgl. Kapitel 4.2 bei einer Klaffung positive Relativverschiebungen zu erhalten. Der berechnete Abstand  $r$  nimmt somit bei einer Klaffung ein negatives Vorzeichen an. Überschreitet der Abstand zwischen den Kontaktflächen einen definierten Betrag mit negativem Vorzeichen, gilt der Verbund der Strukturen an dieser Stelle als aufgelöst, sodass keine Aufstellung einer Zuordnungsmatrix erforderlich ist und alle an den entsprechenden Interface-Element-Knoten angeschlossenen Interface-Elemente deaktiviert werden.

Bei ausreichender Nähe der Kontaktflächen im Interface-Element-Knoten des Verbundelementes wird die Bestimmung der Lage des zugehörigen Pseudoknotens fortgesetzt. Das Gleichsetzen der Beschreibung der Elementoberfläche in Form einer Ebenengleichung mit der Beschreibung der Projektion als eine Geradengleichung eliminiert die globalen Koordinaten  $\mathbf{x}_P$  des gesuchten Schnittpunktes und ergibt mit

$$\mathbf{x}_P^T = \mathbf{N}(\xi_P, \eta_P, \zeta_P) \cdot \tilde{\mathbf{X}} \equiv \mathbf{x}_I^T + r \cdot \mathbf{n}_n^T \quad (5.41)$$

ein lineares Gleichungssystem mit drei verbleibenden Unbekannten, das analytisch lösbar ist. Für ein Volumenelement als Faserstrukturelement mit  $m = 8$  Knoten und linearen Ansatzfunktionen und mit der bekannten Referenzkoordinate  $\zeta = 1$  lässt sich beispielsweise die globale  $x$ -Koordinate des Pseudoknotens  $P$  als

$$x_P = x_I + r_P \cdot x_n \equiv \sum_{j=1}^m \phi_j(\xi_P, \eta_P, 1) \cdot x_j \quad (5.42)$$

anschreiben. Welche der drei Referenzkoordinaten als Bekannte eingesetzt wird, ist für die Struktur und die Lösung des Gleichungssystems unbedeutend. Die allgemeine Form des Gleichungssystems und die Unbekannten bleiben auch bei der Verwendung von Elementansätzen höherer Ordnung und einer entsprechend größeren Knotenanzahl  $m$  erhalten, sodass eine effiziente programmiertechnische Umsetzung für beliebige Elementtypen möglich ist.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann direkt als exakte Lösung oder iterativ als Näherungslösung erfolgen. In Abhängigkeit der Ansatzordnung kann die exakte Lösung des Gleichungssystems mathematisch aufwendig werden, daher wird im Rahmen dieser Arbeit eine näherungsweise Lösung des Gleichungssystems gewählt. Die direkte Lösung des Gleichungssystems mit dem GAUSS'schen Eliminationsverfahren ist im Rahmen dieser Arbeit für Interface-Elemente mit linearen Verschiebungsansätzen zur Kontrolle des iterativen Lösungsverfahrens implementiert worden.

Für eine iterative Lösung des Gleichungssystems werden zunächst in jedem Iterationsschritt die Ansatzfunktionen des Faserelementes für eine vordefinierte Anzahl an Punkten entsprechend einem symmetrischen Punktraster um den Oberflächenmittelpunkt im Referenzkoordinatensystem ausgewertet. Der Abstand  $r$  zwischen den so ermittelten Punkten auf der Faseroberfläche  $\mathbf{x}_P$  und dem Interface-Element-Knoten  $\mathbf{x}_I$  als Ursprung der orthogonalen Projektion wird anschließend

vorzeichengerecht ermittelt, um das Restgrößeninkrement  $R$  im umgeformten Gleichungssystem

$$R = \mathbf{N}(\xi_P, \eta_P, \zeta_P) \cdot \tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{x}_I^T + r \cdot \mathbf{n}_n^T \quad (5.43)$$

zu bestimmen und zu minimieren. Im Rahmen dieser Arbeit wird basierend auf der rechteckigen Elementoberfläche als Anzahl der Stützstellen  $n = 4$  gewählt. Derjenige Punkt, der das geringste Restgrößeninkrement liefert, stellt den Mittelpunkt des symmetrischen Punktrasters im folgenden Iterationsschritt dar. Die Weite des Rasters  $k$  verkleinert sich exponentiell mit jeder Iteration  $i$  entsprechend der Funktion

$$k = \frac{4}{2^i}, \quad (5.44)$$

sodass eine signifikante Eingrenzung der Lösung erfolgt. Die Elementgrenzen werden dabei zunächst überschritten, um eine Lokalisierung in die Randbereiche des Referenzelementes zu ermöglichen. Die Konvergenz der Näherungslösung gegen die exakte Lösung wird durch die Unterschreitung eines Grenzwert  $\varepsilon = 1,0 e^{-4}$  für das Residuum

$$R < \varepsilon \quad (5.45)$$

festgestellt. Darüber hinaus wird auch ein Mittelwert  $R_m$  des Residuums der letzten  $n$  Iterationen gebildet, um ein zweites Konvergenzkriterium zu definieren. Entspricht das aktuelle Restgrößeninkrement dem Mittelwert der letzten  $n$  Residuen hinreichend genau mit

$$|R - R_m| < \varepsilon, \quad (5.46)$$

wird die Iteration ebenfalls beendet, da aufgrund der geringen verbleibenden Rasterweite  $k$  keine weitere Verbesserung der Lösung zu erwarten ist. Im Rahmen dieser Arbeit wird der laufende Mittelwert über  $n = 12$  Iterationen gebildet. Die maximale Iterationszahl, hier vordefiniert zu  $n_{\max} = 30$ , beendet die Iteration schließlich, falls trotz der exponentiellen Abnahme der Rasterweite  $k$  nach Gleichung (5.44) keine Konvergenz festgestellt wird.

Die gefundene Lösung der Bestimmungsgleichung (5.41) muss durch eine Überprüfung der Elementgrenzen bestätigt werden. Liegen die Referenzkoordinaten des lokalisierten Schnittpunktes außerhalb des Definitionsbereiches  $[-1; 1]$ , muss das Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems erneut und mit anderen Elementkoordinaten potenziell gegenüberliegender Faserstrukturelemente erfolgen.

Nach der Lösung des Gleichungssystems (5.41) sind die Koordinaten des Pseudoknotens  $P$  auf der Faserelementoberfläche im Referenzkoordinatensystem und der orthogonale Abstand  $r$  zur Matrixoberfläche bekannt. Die globalen Koordinaten  $\mathbf{x}_P$  des virtuellen Pseudoknotens sind für die Bestimmung seines Verschiebungszustandes nicht von Bedeutung und werden nicht explizit berechnet, denn analog zur Beschreibung der Lage mithilfe der Ansatzfunktionen kann dem isoparametrischen Konzept entsprechend auch der Verschiebungszustand des Pseudoknotens mithilfe der Ansatzfunktionen ermittelt werden. Daraus folgen direkt die Wichtungsfaktoren  $w_{ij}$  für  $j \in [1; n_k]$  als Einträge der Zuordnungsmatrix, da die ausgewerteten Ansätze je Pseudoknoten  $P$

$$\mathbf{N}(\xi_P, \eta_P, \zeta_P)^T = [w_{11} \quad w_{12} \quad \dots \quad w_{1n_k}] \quad (5.47)$$

die Gewichtung der Faserelementknoten hinsichtlich des Pseudoknotens innerhalb der Ele-

mentfläche genau widerspiegeln. Damit entspricht die Ordnung der zwischen den umliegenden Knoten interpolierten Positionsbeschreibung genau der Ansatzordnung zur Beschreibung des Verschiebungszustandes.

Mit den bekannten Ansatzfunktionen ist dieses Konzept der Knotenzuordnung für beliebige Elementtypen mit isoparametrischen Ansatzfunktionen beliebiger Ordnung anwendbar. Mit der Zuordnungsmatrix, hier in allgemeiner Form für ein Interface-Element mit vier Knotenpaaren mit den Wichtungsfaktoren  $w_{ij} \in [0; 1]$  mit  $i \in [1; 4]$  für die vier Pseudoknoten des Interface-Elementes und  $j \in [1; n_k]$  für  $n_k$  aktive Knoten von einem oder mehreren Faserelementen und mit der Einheitsmatrix

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

zur Berücksichtigung von je drei Freiheitsgraden je Knoten mit demselben Wichtungsfaktor  $w_{ij}$  zu

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & & & & & \\ & \mathbf{I} & & & & \\ & & \mathbf{I} & & & \\ & & & \mathbf{I} & & \\ & & & & w_{11} \cdot \mathbf{I} & w_{12} \cdot \mathbf{I} \dots w_{1n_k} \cdot \mathbf{I} \\ & & & & w_{21} \cdot \mathbf{I} & w_{22} \cdot \mathbf{I} \dots w_{2n_k} \cdot \mathbf{I} \\ & & & & w_{31} \cdot \mathbf{I} & w_{32} \cdot \mathbf{I} \dots w_{3n_k} \cdot \mathbf{I} \\ & & & & w_{41} \cdot \mathbf{I} & w_{42} \cdot \mathbf{I} \dots w_{4n_k} \cdot \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

aufgestellt, endet der entwickelte Algorithmus zur Knotenzuordnung. Die Summe der Einträge einer jeden Zeile der Zuordnungsmatrix muss dabei genau 1 ergeben, sodass sichergestellt ist, dass der Betrag der Verbundreaktion an einem Interface-Element-Knoten respektive Pseudoknoten durch die Knotenzuordnung nicht in seiner absoluten Größe verändert wird. Die Spaltensumme entspricht der relativen Beteiligung der tatsächlich im System vorhandenen Knoten und kann beliebige Werte annehmen.

Das entwickelte Konzept zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung mit einem Interpolationsansatz gemäß den Ansatzfunktionen der Strukturelemente unterliegt einigen Restriktionen, deren Aufhebung im Rahmen dieser Arbeit nicht genauer untersucht wird. In dieser Formulierung ist das Konzept nur für rechteckige Elementgeometrien mit über die gesamte Kontaktfläche annähernd gleichbleibenden Elementkantenlängen anwendbar. Die Diskretisierung der Faser muss dabei eine ähnliche Feinheit aufweisen wie die Diskretisierung der Verbundzone, da bei der Knotenzuordnung nicht überprüft wird, ob die Kontaktfläche auf der Faserseite vollständig und wahrheitsgemäß erfasst wird. Für dreieckige Elementoberflächen etwa wäre diese Überprüfung zwingend erforderlich, um eine gleichmäßige Verteilung der Verbundreaktion auf die Kontaktfläche sicherzustellen. Gleichmaßen wird vorausgesetzt, dass sowohl die Faser- als auch die Matrixoberfläche durch die Beanspruchung keine übermäßigen Verzerrungen aufweisen und sich somit ebenfalls eine lückenlose Kontaktfläche ergibt.

Im folgenden Kapitel wird beispielhaft eine bereits im unbelasteten Initialzustand unterschiedliche Vernetzung von Verbundzone und Faser untersucht. Als Weiterentwicklung der gegenwärtigen Formulierung wird daher vorgeschlagen, definierte Einzugsbereiche in Abhängigkeit der

jeweiligen Verbundelementgröße vorzusehen, über die eine resultierende Verbundreaktion unter Berücksichtigung aller Faserelementknoten in diesen Bereichen verteilt wird.

Für die Simulation eines Faserauszugversuches mit großen Relativverschiebungen verlangt die vorliegende Formulierung des Algorithmus im FE-Programm eine vollständige Allokation möglicher Speicherplätze für alle Kombinationen zugeordneter Knotenfreiheitsgrade. Die entkoppelte Vernetzung von Faser und Matrix mit daran angeschlossener Verbundzone führt im Allgemeinen zu einer vergleichsweise großen und im Laufe der Simulation eines Faserauszugversuches immer wieder veränderten Bandbreite im Gesamtgleichungssystem. Eine Umordnung der Matrixeinträge ist daher für eine effiziente Lösung des Gleichungssystems erforderlich. Im Rahmen dieser Arbeit wird der CUTHILL-MCKEE-Algorithmus zur Optimierung der Bandbreite angewendet.

Die erweiterte Formulierung der Interface-Elemente erlaubt eine unabhängige und parallele Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementlastvektoren. Für die parallelisierte Berechnung mit dem institutseigenen FE-Programm werden alle Elemente eines FE-Modells gleichmäßig auf eine vorbestimmte Anzahl an Prozessoren verteilt. Während die Informationen aller Knoten wie beispielsweise ihre initiale und verschobene Lage überall für die Elementberechnung vorhanden sind, sind Elementinformationen wie etwa Konnektivitäten und Nachbarschaften nicht allgemein zugänglich. Der Knotensuchalgorithmus, der im Rahmen der Elementberechnung unabhängig für jeden Interface-Element-Knoten die Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung vollzieht, benötigt Informationen über die gesamte, potenzielle Kontaktfläche. Mithilfe von zusätzlichen Eingabedateien werden jedem Interface-Element sowohl die Elementinzidenzen, Knotennummern und Konnektivitäten der Faseroberfläche, als auch der Matrixoberfläche mitgegeben. Dabei wird die Knotenreihenfolge entsprechend der Definition der Normalenrichtung vorsortiert. Darüber hinaus muss der Zugriff auf die Ansatzfunktionen der Faserstrukturelemente sichergestellt sein, um die Wichtungsfaktoren für die Zuordnungsmatrix  $\mathbf{M}$  entsprechend der Definition (5.49) zu bestimmen.

Die vorgestellte Erweiterung der Verbundelemente um den Algorithmus zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung ist vorgesehen zur Beschreibung des verschieblichen Verbundes mit dem entwickelten Materialmodell, vgl. Kapitel 4.2. Der starre Verbund setzt dabei eine passende Vernetzung beider Kontaktoberflächen voraus. Der Grenzwert des Abstandes zwischen einem Interface-Element-Knoten und dem nächstgelegenen Faserknoten stellt die resultierende Relativverschiebung bei erstmaliger Knotenzuordnung dar. Mathematisch betrachtet ist eine veränderte Knotenzuordnung bereits bei einer geringen Relativverschiebung zwischen den Kontaktoberflächen von weniger als der halben Verbundelementlänge in Verschiebungsrichtung sinnvoll, um eine realitätsnahe Verbundwirkung abzubilden. Bei Verwendung von Verbundelementen, die stark von einer quadratischen Grundfläche abweichen, ist die Knotenzuordnung bei einer Verschiebung parallel zur langen Elementkante problemlos möglich. Wird der Grenzwert dieses Abstandes in Übereinstimmung mit der Relativverschiebung  $s_c$ , bei der die lokale Ablösung der Kontaktflächen gemäß des Materialmodells erfolgt, gewählt, folgen daraus Anforderungen an die Feinheit der Diskretisierung der Verbundzone und der Faser. Bei einer abweichenden Vernetzung der Kontaktoberflächen im starren Verbund, wie im folgenden Kapitel beispielhaft untersucht, ist die physikalische Interpretierbarkeit der Abstandsbegrenzung für die Knotenzuordnung nicht mehr gegeben. Die Weiterentwicklung des vorgestellten Konzeptes für Verbundelemente hinsichtlich der Einzugsbereiche der Interface-Element-Knoten schließt eine vom Materialmodell unabhängige Definition eines solchen Grenzwertes daher ein.

### 5.3.2 Mismatching meshes

Bei der Anwendung des entwickelten Geometriemodells mit dem Algorithmus zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung wird im Regelfall von einer identischen Diskretisierung der Kontaktflächen ausgegangen. Mit einsetzender Relativverschiebung wird die adaptive Knotenzuordnung mithilfe des entwickelten Algorithmus unverzichtbar. Die folgende Untersuchung zeigt die Auswirkungen von unterschiedlich diskretisierten Kontaktflächen (*engl. mismatching meshes*) auf die Kraftübertragung zwischen den gekoppelten Komponenten. Eine anschließende Übertragung der Ergebnisse auf die Kraftübertragung zwischen zwei gegeneinander verschobenen Komponenten mit identischer Oberflächenvernetzung liefert Rückschlüsse hinsichtlich der Grenzen des Modells.

Das Berechnungsmodell zur Beschreibung der Verbundwirkung zwischen zwei unterschiedlich vernetzten Kontaktflächen umfasst einen quaderförmigen Ausschnitt aus einer ebenen Verbundzone. Da infolge einer Knotenzuordnung im verschieblichen Verbund der Einzugsbereich der Kraftübertragung auf beiden Kontaktflächen unterschiedlich groß ist, wird im Folgenden eine quasi-starre Kopplung mithilfe der entwickelten Interface-Elemente mit initialer Knotenzuordnung und linearen Ansatzfunktionen unter einer Zugbeanspruchung senkrecht zur Kontaktebene simuliert.

Den Komponenten wird vereinfachend linear-elastisches Materialverhalten nach HOOKE zugewiesen mit einem Elastizitätsmodul von jeweils  $E_1 = E_2 = 100\,000\text{ N/mm}^2$  und vernachlässigter Querdehnung. In Anlehnung an die Verifikationsbeispiele zum starren Verbund aus Kapitel 5.2 wird eine hohe Verbundsteifigkeit  $E_r = f_r/s_c = 1\,000\,000\text{ N/mm}^3$  gewählt. Die quadratische Verbundfläche ist  $A_b = 1\text{ mm}^2$  groß und mit insgesamt neun Interface-Elementen diskretisiert, vgl. Abbildung 5.9.

Bei einer Verschiebung von  $v = 0,0001\text{ mm}$  als inhomogene Randbedingung an der Oberseite des quaderförmigen Ausschnittes senkrecht zur Verbundebene folgt aus dem Widerstand  $K_{\text{ges}}$  des Verbundwerkstoffes gegen die Ausdehnung oder das Auseinanderziehen mit der Höhe  $h_1 = h_2 = 1\text{ mm}$  beider Komponenten

$$K_{\text{ges}} = \frac{1}{\frac{h_1}{E_1} + \frac{h_2}{E_2} + \frac{1}{E_r \cdot A_b}} = 47\,619,05\text{ N/mm} \quad (5.50)$$

eine Kraft von  $F = K \cdot v = 4,7619\text{ N}$  beziehungsweise eine über den gesamten Verbundwerkstoff konstante Zugspannung von  $\sigma_t = 4,7619\text{ N/mm}^2$ .

Zum Vergleich werden neben einer identischen Vernetzung beider Kontaktflächen eine in eine Kontaktebenenrichtung abweichende und eine in beiden Richtungen abweichende Diskretisierung der Kontaktfläche auf der den Verbundelementen gegenüberliegenden Seite untersucht, vgl. Abbildung 5.9. Den im vorigen Kapitel 5.2 genannten Einschränkungen des Algorithmus folgend ist nur eine Vergrößerung der Knotenabstände auf der Kontaktfläche gegenüber der Verbundelemente denkbar, da andernfalls unter Umständen eine lückenhafte Kraftübertragung erfolgt. Die Ergebnisse der genannten Varianten hinsichtlich der Zugkraftübertragung und des Verbundspannungsverlaufes sind in der folgenden Abbildung 5.9 dargestellt.  $\sigma_t$  beschreibt die Zugspannung in den Komponenten senkrecht zur Kontaktebene, während mit  $\tau_n$  die Haftzugspannungen in der Verbundzone bezeichnet sind.

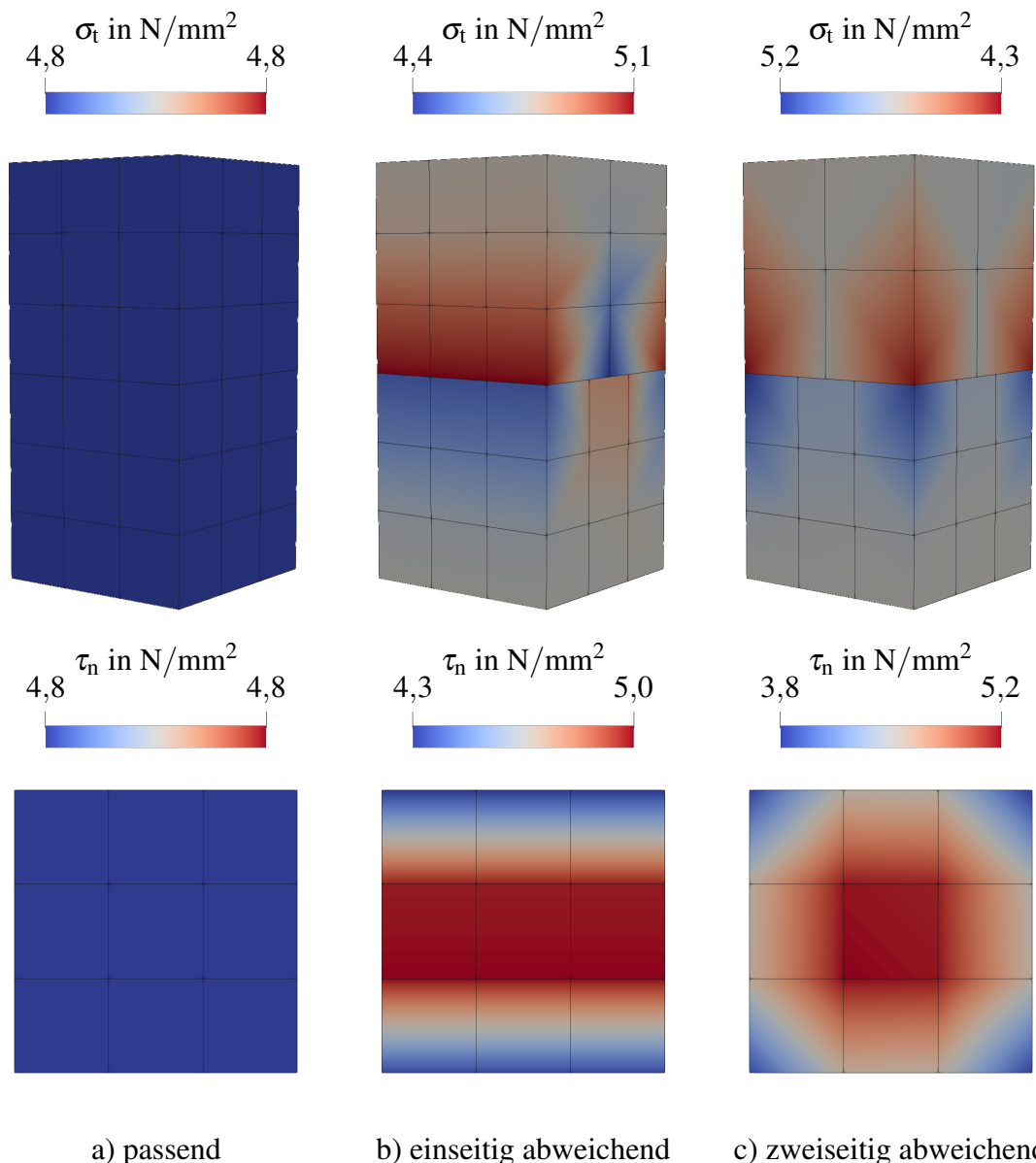


Abbildung 5.9: Vertikale Zugspannungen und Verbundnormalspannungen bei abweichenden Vernetzungen der Verbundzone und der Kontaktoberfläche

Wie in Abbildung 5.9 zu erkennen, kann grundsätzlich das Tragverhalten auch mit abweichender Vernetzung der Kontaktoberfläche gegenüber der Verbundelemente abgebildet werden. Dabei kommt es jedoch zu lokalen Spannungsunterschieden zwischen benachbarten Knoten, während in Summe bei allen drei Varianten dieselbe Kraft übertragen wird. Insbesondere die Darstellung der Verbundnormalspannungen über die Knoten zeigt eine Spannungsumlagerung von den Rändern und Ecken der Verbundzone hin zur Verbundflächenmitte. Diese Spannungsunterschiede erreichen eine beträchtliche Größe und sind unphysikalisch. Ihre Entstehungsursache liegt in der mathematischen Formulierung der Knotenzuordnung.

Mithilfe des entwickelten Algorithmus zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung wird die über die Verbundelementfläche integrierte Verbundreaktion in Form von Knotensteifigkeiten und Knotenkräften auf die gegenüberliegende Kontaktfläche projiziert. Dabei besteht eine räumliche Differenz zwischen der Position der Verbundelementknoten und der Position des jeweiligen

Schwerpunktes der Elementteilflächen, die im Rahmen der Integration den Elementknoten zugewiesen werden. Demzufolge kommt es zu einer Verschiebung der übermittelten Verbundreaktion, wobei das Integral der Verbundwirkung über die gesamte Verbundfläche unverändert korrekt ist. Durch diese Umlagerung wird den Rand- oder Eckknoten ein vergrößerter und den mittigen Knoten ein verringerter Anteil an Verbundsteifigkeit zugewiesen. Als Folge davon werden Spannungsspitzen an den Rändern und Ecken der Verbundfläche erzeugt. Durch die ungleichmäßige Verteilung der Verbundreaktion werden zudem Schubspannungen in der Verbundebene generiert, die unphysikalischen Zwängen innerhalb und in direkter Umgebung der Grenzschicht entsprechen. Grundsätzlich sind zwei Lösungsansätze denkbar. Einerseits kann eine Korrektur der Wichtungsfaktoren in der Zuordnung durch die Berücksichtigung der Lage der Schwerpunkte einzelner Integralfächen eine gleichmäßige Kraftübertragung sicherstellen, andererseits führt auch die simultane Knotenzuordnung aller Elementknoten der gesamten Verbundfläche unter Berücksichtigung der gleichmäßig verteilten Verbundreaktion auf der Matrixseite zu einer Berichtigung des Verbundspannungsverlaufes auf der gegenüberliegenden Kontaktoberfläche. Analog dazu sind auch bei Verwendung quadratischer Ansatzfunktionen lokale Abweichungen in der Verteilung der Verbundreaktion zu korrigieren.

Im Hinblick auf diese festgestellten Umlagerungen bei abweichenden Elementgrößen werden im Folgenden die Auswirkungen von ungleichmäßig verteilten Relativverschiebungen auf die Kraftübertragung zwischen zwei passend vernetzten Komponenten im verschieblichen Verbund nach erfolgter Knotenzuordnung untersucht. Die dreidimensionale Relativverschiebung zwischen zwei Komponenten kann in Abhängigkeit der Verbundsteifigkeit und des Dehnungsvermögens der Komponenten konstant, linear oder nichtlinear über die Verbundlänge verlaufen. Eine konstante Relativverschiebung etwa wird bei einer Verschiebung zweier Starrkörper gegeneinander generiert. In der Grenzschicht des Verbundwerkstoffes Stahlfaserbeton ist hingegen je nach Verbundqualität und Fortschritt des Faserauszuges ein schwach oder stark nichtlinearer Verlauf der Relativverschiebungen parallel und senkrecht zur Kontraktebene zu erwarten, vgl. Kapitel 3.3. Im Folgenden wird die Knotenzuordnung bei linearer Interpolation vereinfachend für eine eindimensionale Grenzschicht der Länge  $\ell_e = 10\text{ mm}$  mit einer nichtlinearen parallelen Relativverschiebung  $\delta_t$  untersucht, vgl. Abbildung 5.10. Variiert werden dabei die Ausprägung des Verschiebungsverlaufes, die Diskretisierung der Kontaktebene und der Grenzwert  $s_c$  der zulässigen Relativverschiebung zwischen zugeordneten Knoten.

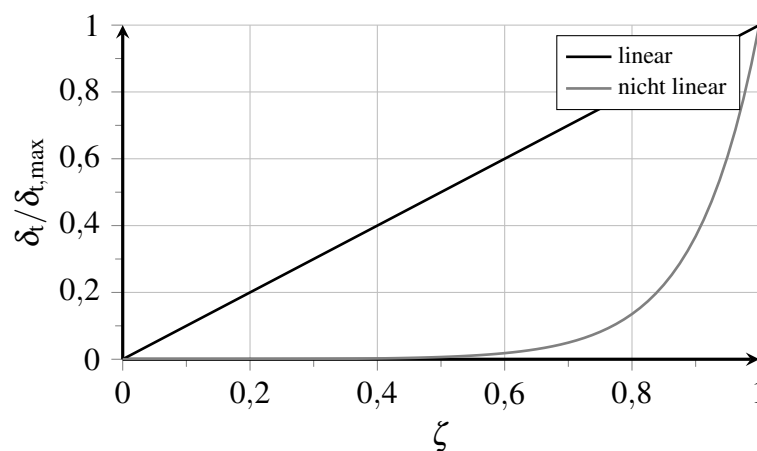


Abbildung 5.10: Beispielhafte Verläufe der Relativverschiebung der Kontaktoberfläche entlang der bezogenen Länge der Verbundzone



Die Relativverschiebung  $\delta_t$  verschwindet am Beginn der Grenzschicht. Am Ende der Grenzschicht wird eine Verschiebung von  $\delta_{t,\max} = 0,1 \text{ mm}$  erreicht, wobei nur die Kontaktfläche gegenüber der Verbundzonenelemente eine Längsdehnung und daraus resultierend eine Verschiebung erfährt. Die vorstehende Abbildung 5.10 zeigt die gewählten Verschiebungsverläufe der oberen Kontaktfläche. Eine lineare Zunahme der Relativverschiebungen veranschaulicht eine eher schwache Verbundzone mit geringem Verbundwiderstand, wohingegen ein nichtlinearer Verlauf der Relativverschiebungen über die Verbundlänge bei einem hohen Verbundwiderstand beziehungsweise bei einer starren Kopplung auftritt, wie im Rahmen der Verifikation des Geometriemodells für starren Verbund in Kapitel 5.2 gezeigt.

In der folgenden Abbildung 5.11 sind die Ergebnisse der Knotenzuordnung für eine grobe Diskretisierung der Verbundzone mit einer Elementlänge von  $\ell_{\text{El}} = \ell_e/20$  dargestellt. Dafür ist die Abweichung der knotenweise akkumulierten Wichtungsfaktoren vom Wert 1, der bei starrem Verbund eine gleichmäßige Kraftübertragung repräsentiert, über die bezogene Verbundlänge  $\zeta$  abgetragen. Die Verbundreaktion wird infolge der Toleranz der Knotenzuordnung für quasi-starren Verbund zwischen der unteren Seite der Grenzschicht mit der Länge  $\ell_e$  und der oberen Kontaktfläche mit der Länge  $\ell_b = \ell_e + \delta_{t,\max}$  übertragen. Die Abweichung  $\Delta w$  der resultierenden Wichtungsfaktoren veranschaulichen in Abbildung 5.11 die Verteilung der Verbundreaktion auf die Knoten der Grenzschichtoberseite.

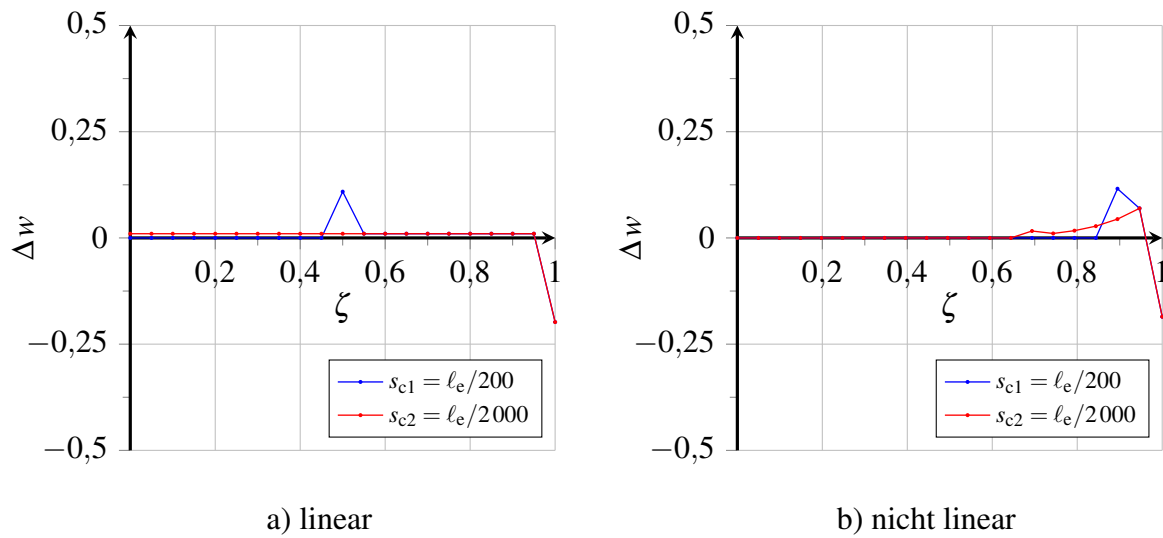


Abbildung 5.11: Abweichung der knotenweise akkumulierten Wichtungsfaktoren nach linearer und nichtlinearer Relativverschiebung für Elementlänge  $\ell_{\text{El}} = \ell_e/20$

Für einen vergleichsweise großen Grenzwert  $s_c = \ell_e/200 = \ell_{\text{El}}/10$  ist sowohl bei einer linear zunehmenden Relativverschiebung als auch bei einem nichtlinearen Verschiebungsverlauf eine lokale Vergrößerung der übertragenen Verbundreaktion zu erkennen. Dabei wird einem Knoten bei unveränderter Einzugsfläche eine höhere Verbundsteifigkeit und eine größere Schubkraft zugewiesen, was bei Lösung des Gesamtgleichungssystems zwangsläufig zu Unregelmäßigkeiten in den resultierenden Knotenverschiebungen führt. Das Integral der Verbundreaktion über beide Kontaktflächen bleibt dabei unverändert gleich; es handelt sich lediglich um lokal ungleichmäßige Umlagerungen. Für einen kleineren Grenzwert  $s_c = \ell_e/2000 = \ell_{\text{El}}/100$  ergibt sich eine gleichmäßigere Verteilung der Verbundreaktion infolge der Knotenzuordnung, vgl. Abbildung 5.11.

Eine feinere Diskretisierung der Verbundzone bewirkt eine verstärkte Lokalisierung der Kraftübertragung zwischen den Kontaktflächen. In der folgenden Abbildung 5.12 sind signifikante Abweichungen der Wichtungsfaktoren an vereinzelt Knoten inmitten der Verbundlänge zu erkennen. Auch bei einer verringerten Elementlänge wirkt sich die Wahl eines kleinen Grenzwertes  $s_c$  positiv auf die Verteilung der Verbundreaktion durch die Knotenzuordnung aus, wobei auch die in rot dargestellten Verläufe für den kleinen Grenzwert  $s_c = \ell_e/2000$  eine lokale Vergrößerung der Verbundsteifigkeit und Verbundkraft an einem Knoten aufweisen, vgl. Abbildung 5.12.

Die Umlagerung der Verbundreaktion auf die Bereiche mit vergleichsweise hoher Relativverschiebung, d. h. am Ende der Grenzschicht, folgt aus der infolge von Längsdehnungen der Oberseite reduzierten, mitwirkenden Verbundlänge. Dabei steuert der Grenzwert  $s_c$  die Aktivierung des Algorithmus zur Knotenzuordnung. Vor dem Hintergrund der numerischen Effizienz verringert die Berücksichtigung dieser Toleranzschwelle bei annähernd übereinanderliegenden Knoten erheblich den Rechenaufwand innerhalb der elementweisen Berechnung von Steifigkeitsmatrix und Lastvektor. Im Einklang mit dem entwickelten Materialmodell unterscheidet der Grenzwert  $s_c$  zwischen linear-elastischem Materialverhalten mit quasi-starren Verbund und nichtlinearem Verbundverhalten mit Relativverschiebungen zwischen den Kontaktoberflächen. Numerische Ungenauigkeiten bei der Bestimmung von Knotenabständen im Rahmen des Knotensuchalgorithmus werden außerdem effektiv aufgefangen. Trotz dieser Vorteile führt die Einführung einer Toleranzschwelle  $s_c$  insbesondere an der Übergangsstelle zwischen der Über- und Unterschreitung des Grenzwertes zu Unregelmäßigkeiten, wie in den Abbildungen 5.11 und 5.12 zu erkennen, und unter Umständen zu Konvergenzproblemen.

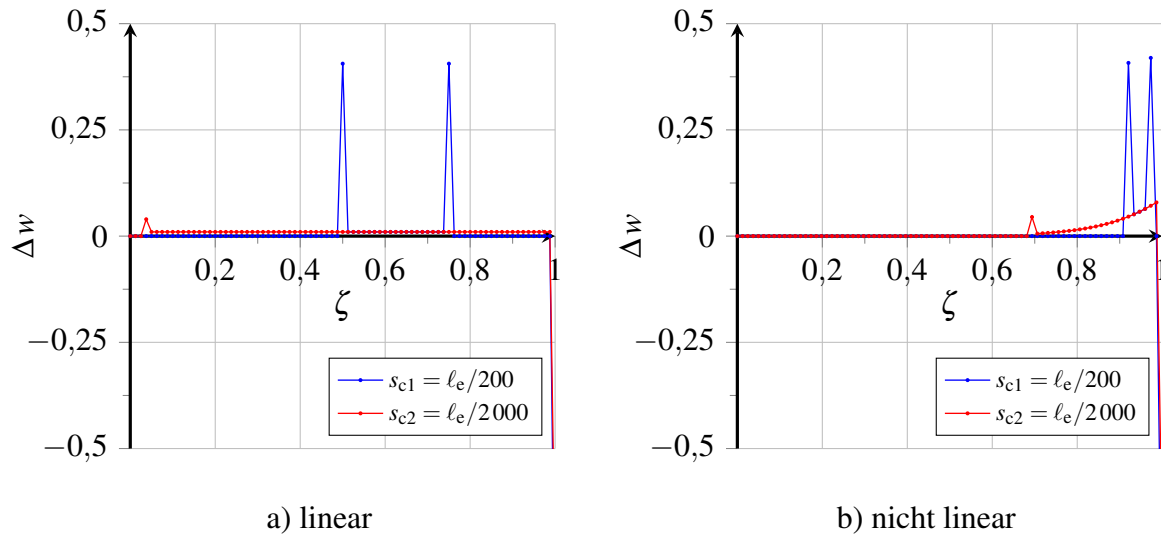


Abbildung 5.12: Abweichung der knotenweise akkumulierten Wichtungsfaktoren nach linearer und nichtlinearer Relativverschiebung für Elementlänge  $\ell_{EI} = \ell_e/80$

Dabei spielt die Größe des Verbundwiderstandes, die zusammen mit dem Dehnungsvermögen der Komponenten maßgeblich den Verlauf der Relativverschiebungen bei Beanspruchung bestimmt, nur eine untergeordnete Rolle. Eingehende Untersuchungen der Entwicklung der Relativverschiebung während der fortschreitenden Ablösung zwischen Faser und Matrix zeigen, dass die Ausprägung der nichtlinearen Verteilung von Relativverschiebungen und Verbundspannungen bei zunehmender Gesamtverschiebung mindestens bis zur vollständigen Ablösung erhalten

bleibt, vgl. Kapitel 5.2. Damit können durch eine sorgfältige Einstellung der Modellparameter Konvergenzprobleme aufgrund von unphysikalischen Umlagerungen vermieden werden.

Die gewählte Größe des Grenzwertes hat einen direkten Einfluss auf die Umlagerung der Verbundreaktion im Bereich von zunehmenden Relativverschiebungen. Je kleiner der Betrag von  $s_c$  gewählt wird, desto größer ist die Dämpfung der numerischen und physikalischen Singularitätsstelle im Bereich der beginnenden Ablösung zwischen den Kontaktoberflächen. Übertragen auf das Faserauszugproblem bedeutet das, dass die mit Beanspruchung allmählich einsetzende Kontaktzonenrissbildung am Faseraustrittsort durch einen kleinen Grenzwert  $s_c$  bei geringen Relativverschiebungen durch die weitreichende Aktivierung der Knotenzuordnung eine größere Verbundfläche am Lastabtrag beteiligt ist und somit eine gleichmäßigere Verteilung der Verbundreaktion im Bereich der aktivierten Faserlänge möglich ist. Die Ergebnisse in den Abbildungen 5.11 und 5.12 weisen darauf hin, dass ein geringes Verhältnis zwischen dem Grenzwert  $s_c$  und der Elementlänge  $\ell_{El}$ , z. B.  $s_c/\ell_{El} = 0,01$  wie bei der groben Diskretisierung in Verbindung mit  $s_{c2}$ , zu gleichmäßigeren Umlagerungen führen kann. Die Wahl sehr kleiner Beträge für die Toleranzgrenze  $s_c$  macht jedoch gleichzeitig eine gezielte Steuerung der Faseraktivierung im Rahmen des Debondings mit dem entwickelten Modell unmöglich. Die Ablösung der Faser von der Matrix bei geringfügigen Relativverschiebungen, die durch die Überschreitung dieses Grenzwertes definiert ist, bewirkt bei entsprechender Querkontraktion der Faser infolge der Beanspruchung ein plötzliches Ausreißen der Faser aus der Matrix. Die Gleichschaltung der Aktivierung des Knotensuchalgorithmus mit der materialbedingten Ablösung der Komponenten voneinander im entwickelten Modell erfordert die Einstellung der Größe von  $s_c$  gemäß der adhäsiven Verbundwirkung, vgl. Kapitel 4.2 und 5.2.

### 5.3.3 Rissöffnungsarten der Verbundzone

Der Übergang zwischen starrem und verschieblichem Verbund ist durch die spontane Bildung eines Kontaktzonenrisses innerhalb der Grenzschicht zwischen den Komponenten gekennzeichnet. Die Auflösung des von Haftung, Adhäsion und Mikroverzahnung geprägten starren Verbundes wird durch die einsetzende dreidimensionale Relativverschiebung zwischen Faser und Matrix initiiert, vgl. Kapitel 3.1. Die Beanspruchung der Grenzschicht ist dabei im Regelfall eine Kombination aus einem ebenen Anteil parallel zur Kontaktebene und einem Anteil in Normalenrichtung, vgl. Kapitel 4.2. Die Bildung des Kontaktzonenrisses ist im Allgemeinen die Folge aus dieser gemischten Beanspruchung.

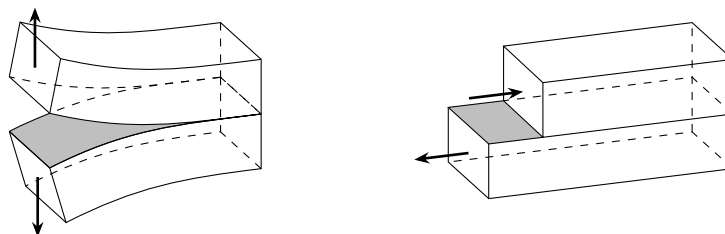


Abbildung 5.13: Schematische Darstellung der bruchmechanischen Rissöffnungsarten infolge einer Querkzug- und ebenen Schubbeanspruchung

Im Folgenden wird die Ablösung infolge der Kontaktzonenrissbildung und die damit einhergehende Relativverschiebung der Komponenten gegeneinander zur Überprüfung der Funktionalität

des um den Algorithmus zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung erweiterten Geometriemodells vereinfacht in Analogie zu den Rissmodi der linear-elastischen Bruchmechanik simuliert. Maßgebend sind dabei zum einen der erste Deformationsmodus mit einer Beanspruchung normal zu den Rissufern mit einer daraus resultierenden Klaffung und zum anderen der zweite Rissmodus mit einer ebenen Schubbeanspruchung der Grenzschicht, wie in Abbildung 5.13 skizziert. Die dritte mögliche Beanspruchungskategorie mit Verschiebungen der Komponenten quer zur Rissausbreitungsrichtung infolge einer Scherbeanspruchung wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher betrachtet, da sie für die Modellierung des rotationssymmetrischen Faserauszugproblems mit unzulässiger Verdrillung der Faser innerhalb des Faserkanals nicht von Bedeutung ist, vgl. Kapitel 4.2.

Für die Simulation der Deformation und Separation eines Verbundkörpers wird ein quaderförmiger, nicht gekrümmter Ausschnitt zweier gekoppelter Strukturen jeweils mit quadratischem Querschnitt mit einer Kantenlänge von  $a = 1\text{ mm}$  gewählt und diskretisiert. Zusätzlich zur Verbundzone mit einer Länge von  $\ell_b = 10\text{ mm}$ , welche in Abbildung 5.14 in rot gekennzeichnet ist, werden an beiden Enden jeweils  $a = 1\text{ mm}$  nicht gekoppelte Länge zur geregelten Einleitung der Beanspruchung und der Lagerung vorgesehen, sodass das FE-Modell eine Gesamtlänge von  $\ell = 12\text{ mm}$  aufweist, vgl. Abbildung 5.14. Während der untere Teilkörper statisch bestimmt gelagert ist, wird der obere Teilkörper an einer der Stirnseiten durch eine inhomogene Wegrandbedingung beansprucht. Zur Vermeidung unplanmäßigen Ausweichens wird auch der obere Teil des Verbundkörpers seitlich durch entsprechende DIRICHLET-Randbedingung gehalten. Für die Simulation einer Klaffung wird zusätzlich der Lasteinleitung gegenüberliegende Stirnseite des oberen Teilkörpers in vertikaler Richtung gehalten. Für die Simulation einer parallelen Verschiebung der Teilkörper wird durch eine zusätzliche Festhaltung des oberen Teils in vertikaler Richtung die Aufweitung der Verbundzone unterbunden.

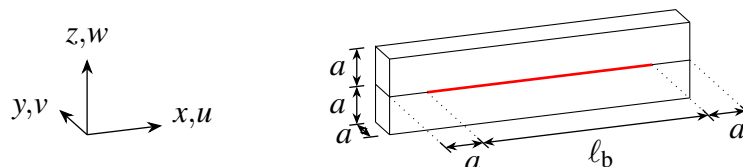


Abbildung 5.14: Parameterdefinition des Berechnungsmodells für die Simulation von bruchmechanischen Rissöffnungsarten

Für beide Komponenten wird im Rahmen dieses Beispiels linear-elastisches Materialverhalten ohne Berücksichtigung von Querdehnung gewählt. Dem oberen Teilkörper wird dafür ein Elastizitätsmodul von  $E = 10000\text{ N/mm}^2$  zugewiesen, während der untere Teilkörper mit  $E = 100000\text{ N/mm}^2$  vergleichsweise steif ist. Die Verbundzone wird mit dem entwickelten Materialmodell gemäß Kapitel 4.2 beschrieben. Durch eine entsprechende Wahl der Modellparameter lässt sich die Verbundzone mit linear-elastisch-ideal-plastischem Materialverhalten ohne eine Schädigungs- und Degradationsentwicklung beschreiben mit einer Verbundfestigkeit von  $f_r = f_s = 10\text{ N/mm}^2$ . Vereinfachend wird eine Verfestigung infolge der Interaktion mit verschiebungsinduzierten Verbundnormalspannungen ausgeschlossen. Als fiktiver Faserdurchmesser  $d_f = 1\text{ mm}$  wird die Dicke eines Teilkörpers senkrecht zur Verbundzone gewählt. Mit einer elastischen Relativverschiebung  $s_c = 0,01\text{ mm}$  bis zum Beginn der Ablösung, die hier als Grenzwert des tolerierten Abstandes zwischen Interface-Element-Knoten und dem nächstgelegenen Faserknoten gewählt wird, wird der Verbundzone eine Steifigkeit in Höhe von  $E_r = f_r/s_c = 1000\text{ N/mm}^3$  zugewiesen.

Zur Verifikation des erweiterten Geometriemodells werden je Beanspruchungskategorie FE-Modelle mit insgesamt drei verschiedenen Diskretisierungen miteinander verglichen. Ausgehend von der Diskretisierung mit isoparametrischen Hexaeder- und Interface-Elementen mit linearen Ansatzfunktionen, im Folgenden als Variante A bezeichnet, werden weitere Varianten mit der halben Elementkantenlänge (Variante B) und mit vergrößerter Ansatzordnung (Variante C) untersucht. Entsprechend beträgt bei Variante A die Anzahl der Freiheitsgrade 7350, während bei Variante B mit der feineren Vernetzung und bei Variante C mit zusätzlichen Knoten in der Mitte aller Elementkanten sowie in den Elementmittelpunkten das Gleichungssystem 47142 Freiheitsgrade umfasst. Für beide Beanspruchungsarten in Abbildung 5.13 wird der Widerstand des Verbundkörpers gegen die Separation der Komponenten im Bezug auf die Beanspruchung in Form der Wegrandbedingung ausgewertet.

In der folgenden Abbildung 5.15 sind die Ergebnisse der Simulation einer Klaffung anhand der drei untersuchten Varianten dargestellt. Auf der linken Seite sind die Querkzugspannungen  $\sigma_{zz}$  in den Komponenten und die Verbundnormalspannungen  $\tau_n$  in der Verbundzone gemäß Variante A bei einer senkrechten Relativverschiebung von  $\Delta w = 0,1856 \text{ mm}$  an der Stirnseite abgebildet. Das Diagramm auf der rechten Seite zeigt die fortschreitende Risslänge  $\ell_{cr}$  über die aufgegebene Relativverschiebung  $\Delta w$  an der Stirnseite des oberen Teilkörpers für alle drei untersuchten Varianten A, B, und C. Die unterschiedlichen Diskretisierungen führen dabei auf denselben Rissfortschritt. Die Bildung von Kontaktzonenrissen aufgrund von Querkzugspannungen ist daher mit dem entwickelten Verbundmodell passend beschrieben.

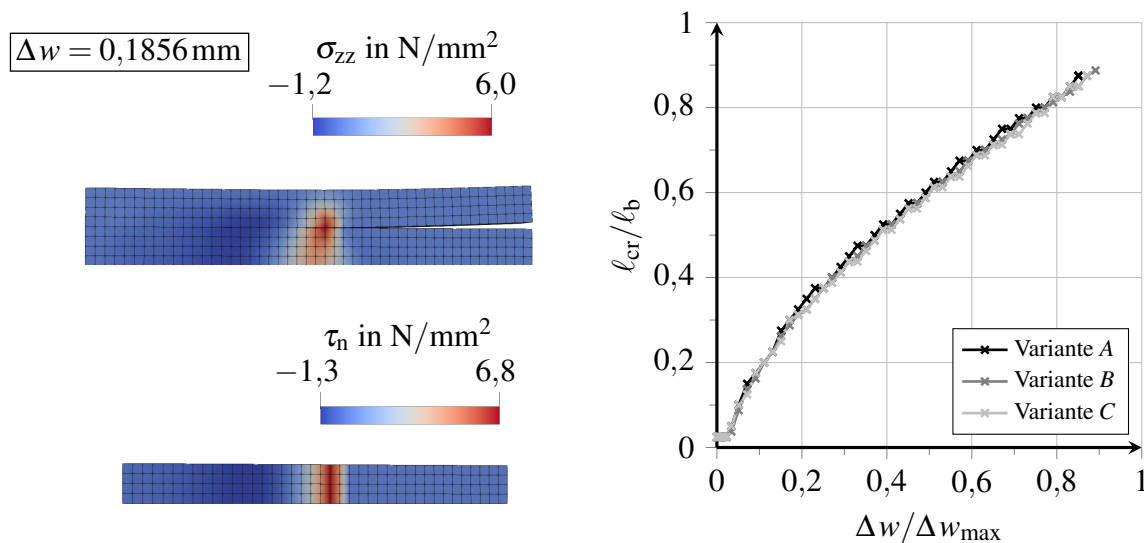


Abbildung 5.15: Verteilung der Querkzug- und Verbundnormalspannungen und Kontaktzonenrissbildung infolge der Relativverschiebung  $\Delta w$

Die zweite Rissmode entspricht der wesentlichen Beanspruchung der Verbundzone im Rahmen von Faserauszugproblemen. Die folgende Abbildung 5.16 fasst die Ergebnisse der Simulation von Schubbeanspruchungen für die drei Untersuchungsvarianten zusammen. Auf der linken Seite sind aus der Simulation der Variante A die Schubspannungen  $\sigma_{xz}$  in den Komponenten und die Verbundschubspannungen  $\tau_t$  bei einer parallelen Relativverschiebung von  $\Delta u = 0,0387 \text{ mm}$  an der Stirnseite dargestellt. Das Diagramm auf der rechten Seite zeigt den Verlauf des integralen Verbundwiderstandes als Zugspannung  $\sigma_{xx}$  in Verschiebungsrichtung über die aufgegebene Relativverschiebung  $\Delta u$  an der Stirnseite oberen Teilkörpers für alle drei untersuchten Varianten.

Die unterschiedlichen Diskretisierungen der Varianten A, B, und C führen dabei auf dieselben Verläufe. Die Kontaktzonenrissbildung infolge von Schubbeanspruchungen des Verbundkörpers kann für das vereinfacht beschriebene, linear-elastisch-ideal-plastische Verbundverhalten ohne Degradation und Schädigung anhand des Auszugwiderstandes nachvollzogen werden, vgl. Abbildung 3.9. Der Rissfortschritt erfolgt im Bereich des Plateaus, vgl. Abbildung 5.16. Mit Beginn des absteigenden Verlaufes gilt die Kontaktzone als vollständig gerissen. Die Bildung von Kontaktzonenrissen aufgrund von Schubspannungen sowie der infolge weiterer Verschiebungen abnehmende Verbundwiderstand sind mit dem entwickelten Verbundmodell passend beschrieben.

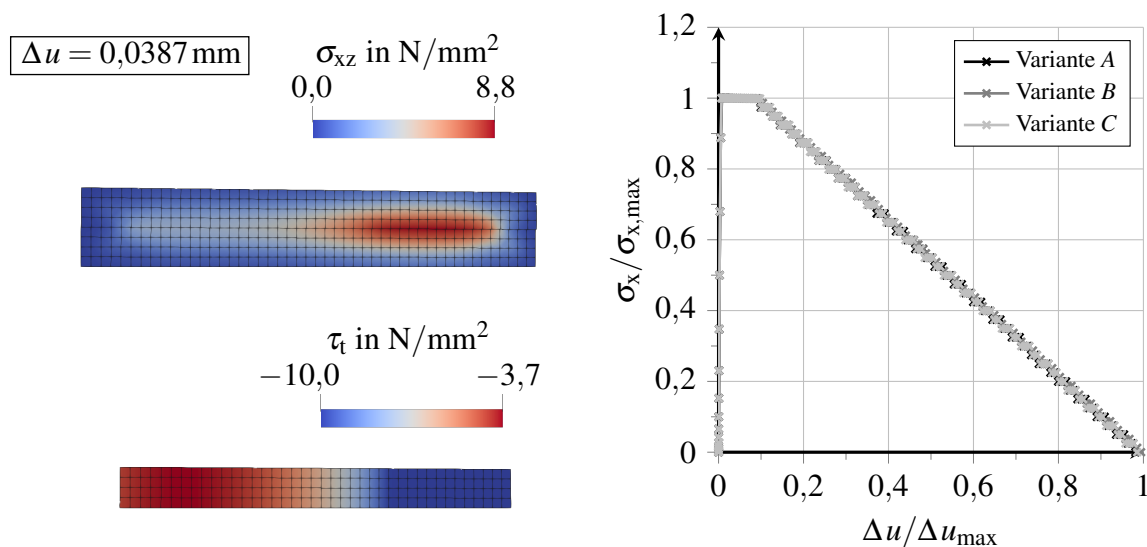


Abbildung 5.16: Verteilung der Schub- und Verbundschubspannungen und Verlauf des Auszugwiderstandes über die Relativverschiebung  $\Delta u$

Die wesentlichen Beanspruchungsarten der Verbundzone im Faserauszugproblem werden durch das entwickelte Verbundmodell adäquat beschrieben. Dabei zeigen die Verbundzonenelemente mit linearen und quadratischen Ansatzfunktionen im Hinblick auf die physikalische Singularität im Bereich der scharfkantigen Steifigkeitssprünge zwischen den Komponenten bei unterschiedlichen Diskretisierungseinheiten realistische Spannungsverteilungen. In den Untersuchungen zum Schubtragverhalten wird eine auffällige Querdruckspannungsentwicklung am Beginn und am Ende der veränderlichen Verbundlänge beobachtet. Eine detaillierte Auswertung dazu ist dem folgenden Kapitel zu entnehmen. Mit dieser Verifikation gilt das Modell als geeignet für weiterführende numerische Untersuchungen des Verbundes und des Auszugverhaltens einer in eine UHPC-Matrix eingebetteten Faser. Numerische Analysen von Faserauszugversuchen werden im folgenden Kapitel vorgestellt.



## 6 Numerische Analyse der Fasertragwirkung

Die Charakterisierung und Modellierung der Tragwirkung rissüberbrückender Mikrostahtfasern in UHPFRC ist das Ziel dieser Arbeit. Dazu werden im folgenden Kapitel numerische Analysen mit dem Verbundmodell, bestehend aus dem in Kapitel 4 vorgestellten Materialmodell in Verbindung mit dem Geometriemodell aus Kapitel 5, durchgeführt und systematisch ausgewertet. Dabei werden im Rahmen dieser Arbeit Potenziale und Auswirkungen der Faserzugabe in zugbeanspruchten Querschnittsbereichen beziehungsweise infolge einer zentrischen Zugbeanspruchung betrachtet.

Gemäß Kapitel 2 entfalten Mikrostahtfasern ihre Tragwirkung in ultrahochfestem Faserbeton nicht erst bei der beginnenden Aufweitung von Mikrorissen, sondern beteiligen sich auch im ungerissenen Zustand I des Faserbetons, der durch einen starren Verbund zwischen Fasern und der umgebenden Matrixstruktur gekennzeichnet ist, entsprechend ihrer Steifigkeit und ihrem Volumenanteil am Lastabtrag, vgl. Kapitel 2. Für das Verständnis der Fasertragwirkung ist daher der Spannungszustand in unmittelbarer Umgebung der Faser vor der sogenannten Faseraktivierungsphase infolge einer mehrfachen Rissbildung im Gefüge von Interesse, vgl. Abbildung 2.1. Zunächst wird in Kapitel 6.1 eine vollständig in eine ungerissene Betonmatrix eingebettete Einzelfaser untersucht. Diese Untersuchung erlaubt die Identifizierung von Auswirkungen des Fasereinschlusses auf das Spannungs-Deformations-Verhalten sowie von potenziellen Schwachstellen im diskontinuierlichen Gefüge. Im Rahmen dieser Untersuchungen erfolgt auch die Kalibrierung und Validierung der verwendeten Materialmodelle für die hochfeste Stahtfaser und die ultrahochfeste Betonmatrix.

Die Kalibrierung und Validierung des Verbundmodells anhand experimenteller Untersuchungen aus der Literatur wird in Abschnitt 6.2 vorgestellt. Simuliert und numerisch analysiert wird das Auszugverhalten von geraden Mikrostahtfasern mit glatter Oberfläche, die senkrecht zur Matrixoberfläche in einen ultrahochfesten Feinkorn-UHPC eingebettet sind. Darüber hinaus werden auch gegenüber der Auszugrichtung geneigt eingebettete Fasern und Fasern mit mechanischer Endverankerung untersucht. Anhand der verschiedenen Anwendungsbeispiele wird außerdem eine zusammenfassende Bewertung des entwickelten Verbundmodells vorgenommen.

Abschließend erfolgt in Kapitel 6.3 die Auswertung der Forschungsergebnisse hinsichtlich der Fasertragwirkung in UHPFRC. Eine numerische Analyse der Verbundermüdung zeigt dabei Grenzen der Leistungsfähigkeit des Faserverbundwerkstoffes bei wiederkehrenden Zugbeanspruchungen auf. Darüber hinaus wird die Optimierung der Faserwirksamkeit sowie der Robustheit von ultrahochfesten Faserbetonen auf Basis der Verbundwirkung evaluiert.

### 6.1 Numerische Analyse des starren Faser-Matrix-Verbundes

Zur numerischen Analyse des starren Faser-Matrix-Verbundes ist das Materialverhalten der Komponenten Faser und Matrix sowie der Verbundzone zu kalibrieren. In die kontinuumsmechanische Modellierung werden die Plastizitätstheorie mit Berücksichtigung von ver- und entfestigendem Materialverhalten sowie die Kontinuumsschädigungsmechanik einbezogen. Die Komplexität der verwendeten Materialmodelle genügt dabei dem in Kapitel 2 beschriebenen phänomenologischen Materialverhalten der Komponenten. Die Kalibrierung des Verbundmodells orientiert sich hier an den Ergebnissen aus Kapitel 5.2 zur Verifikation des Geometriemodells hinsichtlich der Beschreibung von starrem Verbund. Die Modellierung der für das Auszugverhalten wesentlichen



Phase des verschieblichen Verbundes wird erst im anschließenden Kapitel 6.2 an entsprechende Faserauszugsversuche angepasst.

### 6.1.1 Modellierung des Materialverhaltens von Stahldrahtfasern

Üblicherweise werden in ultrahochfestem Faserbeton hochfeste Mikrofasern aus kalt gezogenem, häufig mit Messing umhüllten Walzstahldraht verwendet, vgl. Kapitel 2.1. Das Zugspannungs-Dehnungs-Verhalten von hochfestem Stahl weist weder plastisches Fließen in Form eines Plateaus in der Spannungs-Dehnungs-Linie noch eine ausgeprägte Verfestigung auf. Nach dem zur Dehnung proportionalen Anstieg der Zugspannung versagt das Material bei Erreichen der Zugfestigkeit spröde mit einer geringen Bruchdehnung. Im Rahmen der numerischen Untersuchungen zur Fasertragwirkung in UHPFRC werden als maßgebende Versagensmechanismen das Herausziehen der Faser aus der Matrix sowie das Reißen der Faser in Betracht gezogen. Zur Beschreibung des Erreichens der Zugfestigkeit ist mindestens eine linear-elastisch-idealplastische Modellierung des Spannungs-Deformations-Verhaltens von Stahlfasern erforderlich. Die Modellierung einer Schädigungsentwicklung etwa infolge von Ermüdungsbeanspruchungen der Faser im Riss ist nicht Bestandteil dieser Arbeit.

Das verwendete Materialmodell für die hochfesten Stahlfasern basiert auf dem Versagenskriterium nach VON MISES

$$F_M(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3 \cdot J_2} - f_y = 0, \quad (6.1)$$

das den zulässigen dreidimensionalen Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}$  mithilfe der zweiten Invariante des zugehörigen Spannungsdeviators  $J_2$  auf die Fließgrenze  $f_y$  des Materials, die hier der einaxialen Zugfestigkeit  $f_t$  entspricht, begrenzt [DK98], [GS16]. Auf die Berücksichtigung einer isotropen oder kinematischen Verfestigungsfunktion wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet. Das Kriterium (6.1) entspricht im dreidimensionalen Hauptspannungsraum einem Kreiszylinder um die hydrostatische Achse, der im Schnitt durch die  $\sigma_1$ - $\sigma_2$ -Ebene eine Ellipse darstellt. In der folgenden Abbildung 6.1 ist die Versagensfläche nach VON MISES gemäß Gleichung (6.1) in der Meridianebene mithilfe der HAIGH-WESTERGAARD-Koordinaten, vgl. Gleichung (6.4), und in der Deviatorebene senkrecht zur hydrostatischen Achse dargestellt.

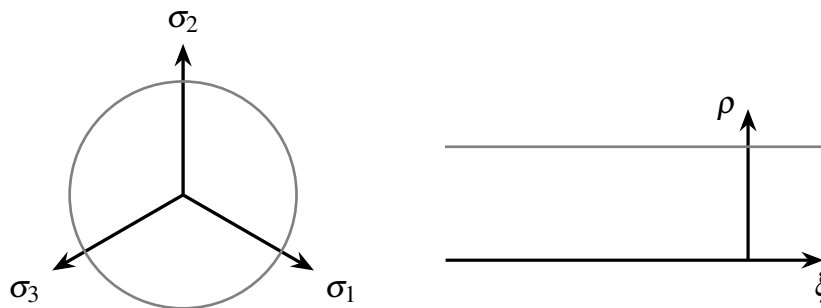


Abbildung 6.1: Versagensfläche nach VON MISES in der Deviator- und Meridianebene

Die vorwiegende Beanspruchungsart der Stahlfasern in UHPFRC ist zentrischer Zug in Richtung der Faserlängsachse. Für die Modellierung spröder, hochfester Stahlfasern wird in den folgenden Untersuchungen vereinfacht das Erreichen der Fließgrenze  $f_{sy}$  dem Versagen durch Reißen

gleichgesetzt. Neben der Längsdehnung erfährt die zugbeanspruchte Faser auch eine Querkontraktion, deren Größenordnung durch die Querdehnzahl  $\nu_s$  bestimmt wird. Darüber hinaus kann infolge der Verbundreaktion auch eine Druckbeanspruchung in Querrichtung auftreten, vgl. Kapitel 4.2. Bei starrem Verbund zwischen Faser und Matrix ist auch die Beanspruchung durch zentrischen Druck denkbar. Da ein seitliches Ausweichen der eingebetteten Faser nicht möglich ist, wird das Knicken der schlanken Stahlfaser nicht betrachtet. In der folgenden Abbildung 6.2 ist das modellierte Spannungs-Deformations-Verhalten hochfester Stahlfasern unter einer einaxialen Zugbeanspruchung sowie einer einaxialen Druckbeanspruchung in Längsrichtung dargestellt. Neben den ertragbaren Zugspannungen unter einaxialer Zugbeanspruchung werden durch das Kriterium auch mehraxiale Spannungszustände sowie Druckspannungen auf die Festigkeit  $f_t$  begrenzt, vgl. Abbildung 6.2. Dabei liefert das Kriterium für den Druck- und den Zugmeridian gleiche Werte.

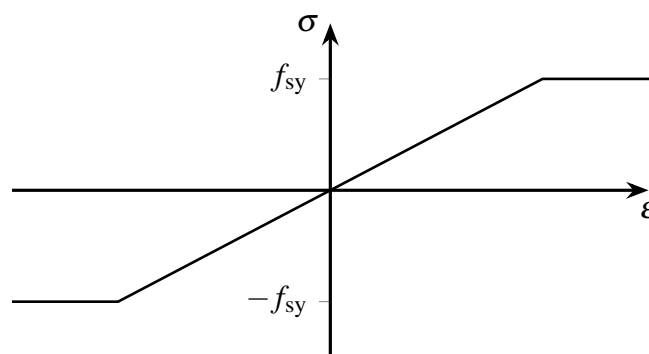


Abbildung 6.2: Modelliertes Spannungs-Deformations-Verhalten hochfester Stahlfasern

### 6.1.2 Modellierung des Materialverhaltens von UHPC

Gegenüber der Modellierung der Stahlfasern erfordert die Beschreibung des Materialverhaltens der UHPC-Matrix im Rahmen der Kontinuumsmechanik eine höhere Modellkomplexität, damit neben elastischen und inelastischen Dehnungen auch eine Schädigung abgebildet werden kann. Darüber hinaus treten insbesondere in unmittelbarer Umgebung der eingebetteten Faser dreidimensionale Spannungszustände auf, die dementsprechend mit mehrdimensionalen Materialmodellen begrenzt werden müssen. Die numerische Stabilität des Materialmodells ist außerdem von Bedeutung. Im Rahmen dieser Arbeit wird das optimierte Gefüge von Feinkorn-UHPC auf der Mesoskala verschmiert als homogenes und isotropes Kontinuum beschrieben, vgl. Kapitel 2. Darüber hinaus erfolgt keine Modifikation der Materialeigenschaften und des Spannungs-Deformations-Verhaltens im Bereich der Verbundzone zwischen Fasern und Matrix, vgl. Kapitel 2.1 und 3.1.

Zur kontinuumsmechanischen Beschreibung des Materialverhaltens von UHPC in komplexen Beanspruchungssituationen wird ein bewährtes Mehrflächenplastizitätsmodell für Beton verwendet. Darin werden die dreidimensionalen Spannungszustände im Zugbereich durch ein zugunsten stetiger Differenzierbarkeit modifiziertes Hauptspannungskriterium nach RANKINE begrenzt, während für Druckspannungszustände das um eine Kappe im dreiaxialen Druckbereich erweiterte Bruchkriterium nach DRUCKER & PRAGER maßgebend ist, vgl. [Bec09], [Cra16], [Spe08]. Das Versagenskriterium nach DRUCKER & PRAGER wird auch im MODEL CODE 2010 zur Beschreibung des mehraxialen, nichtlinearen Spannungs-Deformations-Verhaltens von Beton empfohlen

[fib13]. Die Beschreibung der Versagensfläche in dieser Arbeit folgt den Modifikationen von CRAMER, der aufbauend auf bereits vorliegenden Untersuchungen u. a. von BECKMANN das aus den beiden Teilversagensflächen zusammengesetzte Betonmodell weiterentwickelt, vgl. [Cra16], [Bec09], [MLM98], [DP52], [Ran76].

Das Materialverhalten von UHPC entspricht grundsätzlich dem Verhalten von normalfestem Beton und kann somit nach einer entsprechenden Kalibrierung durch dieselben Materialmodelle beschrieben werden [Spe08]. Nach SPECK sind dabei insbesondere Auswirkungen aus mehraxialen Spannungszuständen zu berücksichtigen [Spe08]. Sie stellt fest, dass das Versagenskriterium nach DRUCKER & PRAGER in seiner ursprünglichen Formulierung weder triaxiale Druckspannungszustände, noch ein- und mehraxiale Zugspannungszustände adäquat abbildet. Dahingegen haben sich die Berücksichtigung einer sogenannten Kappe zur Begrenzung der dreiaxialen Druckfestigkeit, wie beispielsweise vorgeschlagen von RESENDE & MARTIN, sowie das Abschneiden der kegelförmigen Versagensfläche nach DRUCKER & PRAGER im Zugbereich (*engl.* tension cut-off) zur Begrenzung zulässiger Zugspannungszustände durchgesetzt, vgl. [RM85], [RM87], [Spe08].

Darüber hinaus werden u. a. von SPECK unabhängig von einer Kalibrierung die lineare Abhängigkeit der verwendeten Invarianten  $I_1$  und  $J_2$  voneinander sowie die Kreisform im Deviatorschnitt und damit die Unabhängigkeit vom LODE-Winkel  $\theta$  als Kritikpunkte am Modell nach DRUCKER & PRAGER aufgeführt. SPECK stellt alternative Materialmodelle, z. B. nach OTTOSEN, sowie ein eigenes Modell vor [Spe08]. Auch die fehlende stetige Differenzierbarkeit an den Übergängen der entsprechend den Kriterien für den Druck- und den Zugbereich zusammengesetzten Versagensfläche bedarf besonderer Aufmerksamkeit bei der numerischen Umsetzung des Mehrflächenmodells. Demgegenüber erweist sich die Unterscheidung der Spannungsbereiche für die Kalibrierung des Modells als vorteilhaft, da sowohl die Materialgesetze für die Ver- und Entfestigung als auch die Schädigungsformulierung für den Druck- und den Zugbereich separat von einander gewählt und angepasst werden können.

Die Herleitung für das im Rahmen dieser Arbeit verwendete gekoppelte Plastizitäts- und Schädigungsmodell zeigt CRAMER unter zusätzlicher Berücksichtigung chemisch-physikalischer Alterungsprozesse, vgl. [Cra16], die wiederum nicht Bestandteil der numerischen Untersuchungen zur Fasertragwirkung in dieser Arbeit sind. Die mechanische, isotrope Schädigung  $D$ , die sich hier in Abhängigkeit des jeweiligen plastischen Multiplikators  $\lambda_{DP}$  beziehungsweise  $\lambda_R$  getrennt für den Zug- und den Druckbereich und in nichtlokaler Erweiterung nach der impliziten Gradientenformulierung mit der charakteristischen Länge  $\ell_c$  entwickelt, führt im Rahmen des Konzeptes der effektiven Spannungen nach dem Prinzip der Energieäquivalenz zu einer gleichförmigen Skalierung der Versagensfläche [Cra16]. Neben der Schädigung ist auch die gewählte isotrope Verfestigung  $\eta_{DP}$  respektive  $\eta_R$  getrennt für den Zug- und Druckbereich in Abhängigkeit der plastischen Multiplikatoren  $\lambda_{DP}$  und  $\lambda_R$ , jeweils multipliziert mit dem vorzugebenden zugehörigen Verfestigungsmodul  $H_{DP}$  oder  $H_R$ , formuliert, vgl. [Cra16].

Das Versagenskriterium für den Zugbereich auf Basis der Hauptspannungshypothese nach RANKINE

$$F_R(\tilde{\sigma}, \eta_R) = \tilde{\sigma}_{vR} - (f_{ct} + \eta_R) = 0 \quad (6.2)$$

mit der Vergleichsspannung  $\tilde{\sigma}_{vR}$

$$\tilde{\sigma}_{vR}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \begin{cases} \tilde{\sigma}_1 \\ f_R + \sqrt{(\tilde{\sigma}_1 - f_R)^2 + (\tilde{\sigma}_2 - f_R)^2} \\ f_R + \sqrt{(\xi - \xi_R)^2 + \rho^2} \end{cases} \quad (6.3)$$

enthält die von BECKMANN vorgeschlagene Ausrundung der Teilversagensflächen sowie eine Ausrundung der Unstetigkeitsstelle an der Spitze der Versagensfläche mithilfe der HAIGH-WESTERGAARD-Koordinaten

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 \quad \text{und} \quad \rho = \sqrt{2J_2} \quad (6.4)$$

mit den Invarianten  $I_1$  und  $J_2$  des effektiven Spannungstensors  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ , vgl. [Cra16], [Bec09]. Die Ausrundungsparameter  $f_R$  und  $\xi_R$  werden analog zur Modellkalibrierung für normalfesten Beton konstant zu

$$f_R = 0,9 f_{ct} \quad (6.5)$$

und

$$\xi_R = \sqrt{3} \cdot f_R \quad (6.6)$$

gewählt, vgl. [Cra16]. Die durch die Ergänzung einer Kappe zur Begrenzung mehraxialer Druckspannungszustände modifizierte DRUCKER-PRAGER-Hypothese

$$F_{DP}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \eta_{DP}) = \alpha_{DP} \cdot I_1 + \sqrt{J_2 + \delta_{DP} \cdot (\xi - \xi_{c0})^2} - \frac{f_{cc}}{\beta_{DP}} = 0 \quad (6.7)$$

wird gemäß dem Vorschlag von MESCHKE ET AL. kalibriert, vgl. [MLM98], [Cra16]. Wesentliche Einflussgröße im Bezug auf die Rundung der Versagensfläche ist die zweiaxiale Druckfestigkeit  $f_{ccb}$ , die für ultrahochfesten Beton gemäß den Versuchsergebnissen von SPECK zu  $f_{ccb} = 1,1 f_{cc}$  angenommen wird, während für normalfesten Beton gemäß den Versuchen von KUPFER ein Verhältnis von  $f_{ccb}/f_{cc} = 1,16$  eine gute Übereinstimmung liefert, vgl. [Spe08], [CS07a], [KZ73], [Cra16]. Mit  $f_{ccb} = 1,1 f_{cc}$  lassen sich die Modellparameter  $\alpha_{DP}$  und  $\beta_{DP}$  zu

$$\alpha_{DP} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{f_{ccb}/f_{cc} - 1}{2f_{ccb}/f_{cc} - 1} \right) = \frac{\sqrt{3}}{36} \quad (6.8)$$

und

$$\beta_{DP} = \sqrt{3} \left( \frac{2f_{ccb}/f_{cc} - 1}{f_{ccb}/f_{cc}} \right) = \sqrt{3} \frac{12}{11} \quad (6.9)$$

bestimmen, sodass der Einfluss der hydrostatischen Spannungskomponente, repräsentiert durch die Invariante  $I_1$ , auf die Versagensfläche für ultrahochfesten Beton um ca.  $1/3$  verkleinert wird. Die in Gleichung 6.7 mit dem Betrag  $\delta_{DP} \cdot (\xi - \xi_{c0})^2$  ergänzte runde Kappe nach KANG wird in Abhängigkeit des Parameters  $s_{ct}$  kalibriert, der das Verhältnis zwischen der dreiaxialen und der einaxialen Druckfestigkeit erfasst und in Ermangelung belastbarer experimenteller Versuchsdaten zu dreiaxialen Druckfestigkeitsprüfungen von UHPC, entsprechend der Kalibrierung für

Normalbeton zu  $s_{ct} = 7$  gewählt wird, vgl. [Cra16]. Damit folgen die Stellen der Ausrundung im HAIGH-WESTERGAARD-Koordinatensystem zu

$$\xi_{c0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s_{ct} f_{cc} \quad \text{und} \quad \xi_{c1} = -\sqrt{3} \cdot s_{ct} f_{cc}, \quad (6.10)$$

vgl. Abbildung 6.3. Als Alternativen sind auch Formulierungen einer Kappe mit elliptischer oder parabolischer Form in der Literatur zu finden, auf die hier im Detail nicht weiter eingegangen wird, vgl. z. B. [RM85], [RM87]. Die folgende Abbildung 6.3 zeigt die zusammengesetzte Versagensfläche in der Deviator- und in der Meridianebene.

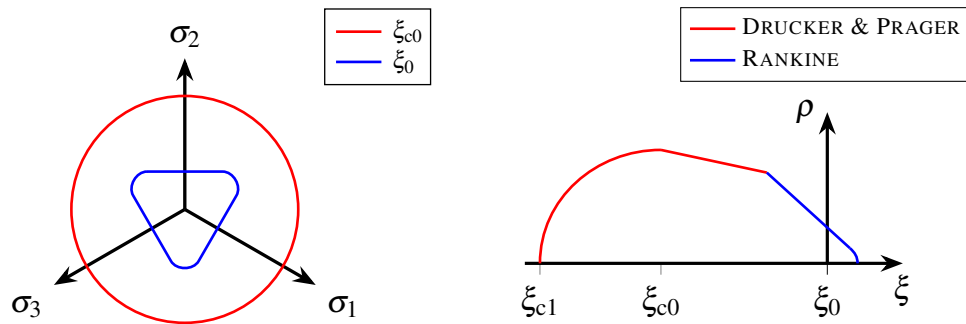


Abbildung 6.3: Zusammengesetzte Versagensfläche nach DRUCKER & PRAGER und RANKINE in der Deviator- und Meridianebene nach [Cra16]

Die zusammengesetzte Versagensfläche nach den Kriterien (6.2) und (6.7) ist im Übergangsbereich der Teilflächen nicht stetig differenzierbar. In diesen Übergangsbereichen wird mithilfe der KOITER'schen Fließregel eine eindeutige Projektion auf die Versagensfläche sichergestellt, vgl. [Cra16]. Danach ergeben sich die effektiven plastischen Verzerrungsraten als Summe der Verzerrungsraten aller aktiven Teilflächen. Für den Druckbereich wird eine nichtassoziierte Fließregel verwendet, vgl. [Cra16].

In Analogie zur Kalibrierung des Schädigungsmodells für normalfesten Beton wird auch für ultrahochfesten Beton das exponentielle Schädigungswachstum nach PEERLINGS ET AL. verwendet, wonach die Schädigungsvariablen  $D_t$  und  $D_c$  zu

$$D_t = 1 - \exp\left(\frac{\bar{\lambda}_R - \varepsilon_{t0}}{\varepsilon_{tf} - \varepsilon_{t0}}\right) \quad \text{und} \quad D_c = 1 - \exp\left(\frac{\bar{\lambda}_{DP} - \varepsilon_{c0}}{\varepsilon_{cf} - \varepsilon_{c0}}\right) \quad (6.11)$$

bestimmt werden. In Kombination ergibt sich eine Gesamtschädigung  $D$  von

$$D = 1 - (1 - D_t) \cdot (1 - D_c), \quad (6.12)$$

mit der der Zusammenhang zwischen effektiven und nominalen Spannungen erfasst wird [Cra16]. Für UHPC ist aufgrund der Sprödigkeit und des explosiven Versagens weder im Zug- noch im Druckbereich in der Spannungs-Dehnungs-Linie eine abfallende Spannung nach dem Bruch experimentell darstellbar. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit auf eine spezielle Kalibrierung der Schädigungsformulierung für ultrahochfesten Beton verzichtet. Nach CRAMER ist das grundsätzliche Schädigungsverhalten von Beton mit den Parametern

$$\varepsilon_{t0} = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{tf} = 2,0e^{-4} \quad (6.13)$$

für den Zugbereich und

$$\varepsilon_{c0} = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon_{cf} = 2,0 e^{-3} \quad (6.14)$$

für den Druckbereich adäquat beschrieben, vgl. [Cra16]. Die Modellierung von Schädigungsprozessen in UHPC infolge von Ermüdung ist nicht Bestandteil dieser Arbeit.

In der folgenden Abbildung 6.4 ist das modellierte Spannungs-Deformations-Verhalten von ultrahochfestem Feinkornbeton infolge einer einaxialen Druck- beziehungsweise Zugbeanspruchung dargestellt. Bei der Berücksichtigung von Schädigung entspricht die Elastizitätsgrenze der einaxialen Zug- oder Druckfestigkeit. Entsprechend der gewählten Modellparameter entwickelt sich die Zugschädigung dabei schneller als die Schädigung unter Druckbeanspruchungen. Das Materialversagen infolge von Zugspannungen tritt damit nahezu unmittelbar nach Überschreitung der Betonzugfestigkeit ein. Bei deaktivierter Schädigungsentwicklung bewirkt die lineare isotrope Verfestigung eine weitere Steigerung der aufnehmbaren Zug- oder Druckspannungen. Infolge dieser Plastifizierung ist das Materialversagen durch zunehmende inelastische Dehnungen gekennzeichnet, die einer Rissbildung im spröden Werkstoff entsprechen.

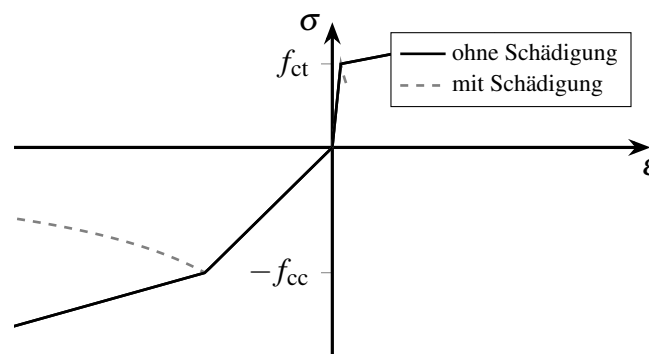


Abbildung 6.4: Modelliertes Spannungs-Deformations-Verhalten von ultrahochfestem Feinkornbeton mit und ohne Berücksichtigung von Schädigung

Durch die Wahl eines sehr hohen Verfestigungsmoduls  $H_{DP}$  für den Druckbereich wäre auch eine Ausrundung des Peaks in der Spannungs-Dehnungs-Linie darstellbar, was einer Rissbildung vor dem endgültigen Versagen entspricht, vgl. Abbildung 2.2. Allerdings führt die hohe Gewichtung der Verfestigungsfunktion auch zu einem duktileren Versagen mit flachem absteigenden Ast in der Spannungs-Dehnungs-Linie. Zugunsten der passenden Abbildung des spröden Druckversagens von UHPC mit geringer Rissbildung wird im Rahmen der Kalibrierung der DRUCKER-PRAGER-Hypothese auf eine Ausrundung der Spannungs-Dehnungs-Linie im Bereich der Bruchlast verzichtet, vgl. Abbildung 6.4.

### 6.1.3 Fasertragwirkung in ungerissenem UHPFRC

Das Materialverhalten von UHPFRC ist maßgeblich durch das inhomogene, diskontinuierliche Gefüge charakterisiert. Der starre Verbund zwischen Fasern und Matrix ermöglicht einen gemeinsamen Lastabtrag bei gleicher Dehnung der Einzelkomponenten, vgl. Kapitel 2. Dabei führen die Steifigkeitsunterschiede zwischen den Materialien bereits während der Betonerhärtung zu Zwangs- und Eigenspannungszuständen. In Kapitel 3.2 ist die dehnungsbehindernde Wirkung

der Faser am Beispiel einer gleichförmigen Volumenverkleinerung evaluiert. Da die ITZ bei ultrahochfestem Beton nahezu identische Materialeigenschaften wie die übrige Matrix aufweist, stellt die Verbundzone im Allgemeinen keine Schwachstelle dar. Die folgende Untersuchung gibt Hinweise auf die Auswirkungen des Fasereinschlusses in einer als homogen und isotrop betrachteten Matrix auf das lokale Spannungs-Deformations-Verhalten. Dabei wird die Verbundzone unter Vernachlässigung thermischer und hygrischer Prozesse im Rahmen dieser Arbeit als in ihrem Initialzustand ungestört betrachtet.

Das FE-Modell für die numerische Analyse des starren Faser-Matrix-Verbundes ist in der folgenden Abbildung 6.5 schematisch dargestellt. Die eingebettete Faser weist einen Durchmesser von  $d_f = 0,2 \text{ mm}$  und eine Gesamtlänge von  $\ell_f = 13 \text{ mm}$  auf. Die umschließende Matrix ist insgesamt  $10 \text{ mm}$  breit und doppelt so hoch wie die Faser, d. h.  $2h_m = 2\ell_f = 26 \text{ mm}$ . Unter Ausnutzung der dreiachsigen Symmetrie kann das Modell auf ein Viertel reduziert werden, wie in Abbildung 6.5 dargestellt. Die Beanspruchung wird mithilfe einer DIRICHLET-Randbedingung an der Unterseite des Ausschnittes eingeleitet, während die Seitenoberflächen der Matrix als frei verformbar angenommen werden.

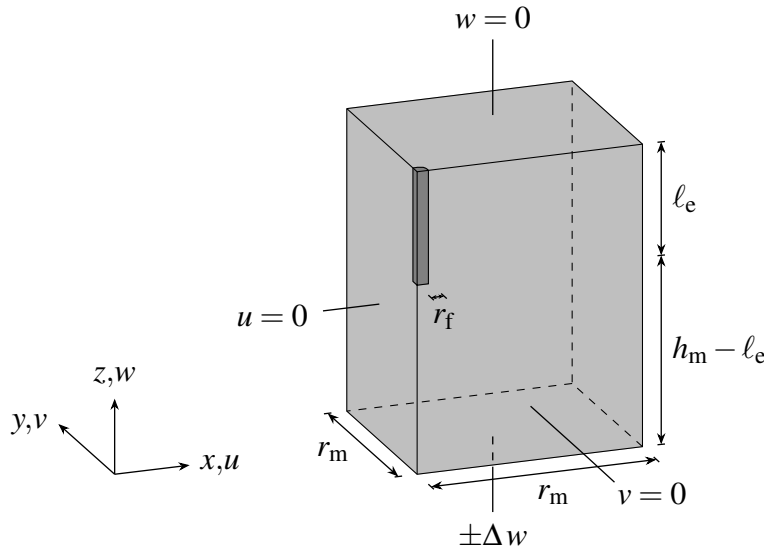


Abbildung 6.5: Schematische Darstellung des Berechnungsmodells zur numerischen Analyse der Fasertragwirkung in ungerissenem UHPFRC

Das Materialverhalten von Faser und Matrix wird entsprechend der vorangegangenen Beschreibung und Kalibrierung modelliert. Die gewählten Materialparameter entsprechen den Annahmen in Kapitel 3.2. Ergänzend wird für die Plastifizierung der Stahlfaser die Elastizitätsgrenze  $f_{sy} = 2000 \text{ N/mm}^2$  gewählt. Die zusätzlichen Modellparameter für den UHPC sind die Zugfestigkeit  $f_{ct} = 10 \text{ N/mm}^2$ , die Druckfestigkeit  $f_{cc} = 150 \text{ N/mm}^2$  und die Verfestigungsmoduln  $H_{DP} = 6000 \text{ N/mm}^2$  respektive  $H_R = 1000 \text{ N/mm}^2$ . Die charakteristische Länge  $\ell_c$  im Rahmen der Schädigungsformulierung beträgt  $1 \text{ mm}$ .

Für die Beschreibung des quasi-starren Verbundes wird das entwickelte Materialmodell analog zu den Beispielen in Kapitel 5.2 mit einer sehr hohen Verbundsteifigkeit verwendet. Zum Vergleich wird außerdem eine starre Kopplung zwischen Faser und Matrix modelliert. Aufgrund des geringen Volumenanteiles der eingeschlossenen Faser in diesem Ausschnitt ist keine signifikante Vergrößerung des Elastizitätsmoduls des Verbundwerkstoffes zu erwarten. Daher

bewirkt der Fasereinschluss keine Veränderung des Tragverhaltens gegenüber der unbewehrten Matrix in Abbildung 6.4. Bei höheren Fasergehalten tritt eine Vergrößerung der Steifigkeit des Faserverbundwerkstoffes im Vergleich zu unbewehrtem Beton auf. Beispielsweise beträgt der Elastizitätsmodul eines ultrahochfesten Faserbetons mit 2,5 Vol.-% Fasergehalt rechnerisch  $53\,750\text{ N/mm}^2$  gegenüber  $E_c = 50\,000\text{ N/mm}^2$  bei unbewehrtem UHPC, wenn für die Fasern ein E-Modul von  $E_s = 200\,000\text{ N/mm}^2$  angenommen wird.

Während sich über die Verbundlänge ein annähernd konstanter Spannungs-Deformations-Zustand im Bereich der Grenzschicht einstellt, dominiert die Singularitätsstelle infolge der Diskontinuität der Materialeigenschaften die numerischen Ergebnisse am eingebetteten scharfkantigen Faserende. Vergleichsrechnungen zeigen, dass mindestens über etwa einen halben Millimeter Verbundlänge am Faserende unphysikalische Spannungen und Dehnungen ermittelt werden. In den folgenden Darstellungen wird als Variante A ein FE-Modell mit Verbundzonenelementen und deaktivierter Schädigungsformulierung im Materialmodell für Beton bezeichnet. Variante B entspricht Variante A, wobei die Stirnseite des eingebetteten Faserendes nicht mit der Matrix verbunden ist. In Variante C werden eine starre Kopplung zwischen Faser und Matrix modelliert, die keine direkte Auswertung der Verbundreaktion zulässt, und die Schädigungsformulierung im Materialmodell für den UHPC aktiviert.

Die folgende Abbildung 6.6 zeigt die Spannungen  $\sigma_{zz}$  und inelastischen Längsdehnungen  $\epsilon_{zz}^{\text{in}}$  in Faserlängsrichtung nach Variante A infolge einer Zugbeanspruchung des Faser-Matrix-Verbundes mit der Wegrandbedingung in Höhe von ca.  $\Delta w = -0,0026\text{ mm}$ , vgl. Abbildung 6.5. Während die Faser eine Zugspannung von  $\sigma_{zz,f} = 40,4\text{ N/mm}^2$  erfährt, wird die Matrix mit Ausnahme des Bereiches um das Faserende herum gleichförmig beansprucht. Dabei wird nahezu überall die Betonzugfestigkeit  $f_{ct} = 10\text{ N/mm}^2$  erreicht, wohingegen seitlich des Faserendes eine geringfügige Entlastung der Matrix auftritt. Dieser Bereich erfährt nur eine Zugspannung von ca.  $\sigma_{zz} = 7,1\text{ N/mm}^2$ , wie in Abbildung 6.6 a) als Minimalwert angegeben.

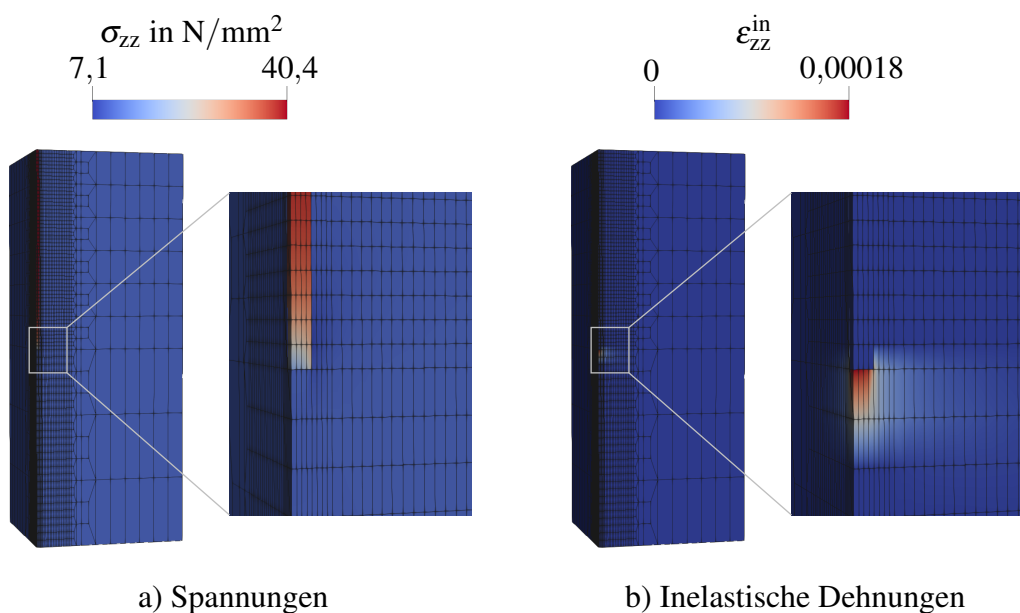


Abbildung 6.6: Darstellung der Spannungen und inelastischen Dehnungen im Faser-Matrix-Verbund nach Modellierungsvariante A in Längsrichtung der Faser



Ursache für diese Spannungumlagerung ist die dehnungsbehindernde Wirkung der Faser. Die Plastifizierung des Betons unterhalb des Faserendes, die einer Schädigung und der Ausbildung einer Rissprozesszone entspricht und in Abbildung 6.6 b) deutlich zu erkennen ist, ermöglicht eine geringfügige Entspannung der Faser im Bereich des Faserendes. Gleichzeitig erfolgt eine Reduzierung der Zugdehnungen in der Faser und in der umgebenden Matrix, die starr mit der Faser verbunden ist. Die Betonmatrix verhält sich seitlich des Faserendes linear-elastisch und erfährt dementsprechend lokal geringere Zugspannungen. Die erkennbare Rissprozesszone in der Matrix unterhalb des Faserendes stellt eine Schwachstelle des Faser-Matrix-Verbundes dar und kann bei weiterer Beanspruchung zur Initiierung eines Risses führen.

Die folgende Abbildung 6.7 zeigt die Bedeutung des diskontinuierlichen Materialverhaltens am Faserende als Singularitätsstelle. Die axiale Zugspannung  $\sigma_{zz,f}$  in der Faser fällt im Zuge der Spannungumlagerung ab und beläuft sich auf Werte zwischen ca.  $8,0 \text{ N/mm}^2$  und  $16,5 \text{ N/mm}^2$  in Abhängigkeit der gewählten Modellierungsvariante *A*, *B* oder *C*, in denen auch die Diskretisierungseinheiten geringfügig unterschiedlich gewählt sind. Insgesamt macht der hier gezeigte Spannungsverlauf in der Faser und in der Matrix, vgl. Abbildung 6.6 a) die geringe Bedeutung von Fasereinschlüssen für die Zugtragfähigkeit in ungerissenem UHPFRC mit guter Verbundqualität deutlich. Die Faserzugfestigkeit ist nicht annähernd erreicht, während die Matrixzugfestigkeit überall im nahezu gleichförmig beanspruchten Querschnitt überschritten wird. Wie in Kapitel 2.4 erläutert, ist die Leistungsfähigkeit von faserbewehrtem Beton erst nach abgeschlossener Mehrfachrissbildung erreicht. Darüber hinaus erfüllt die Faserbewehrung mit der Steigerung der Duktilität und Versagensankündigung eine wichtige Funktion im Bereich des Nachbruchtragverhaltens.

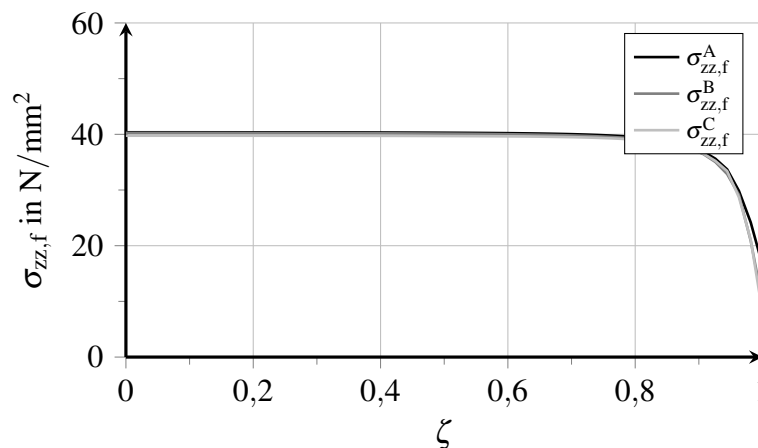


Abbildung 6.7: Verlauf der Längszugspannungen in der Faser über die bezogene Verbundlänge

Die folgende Abbildung 6.8 zeigt, dass auch die Tragfähigkeit der Grenzschicht an der seitlichen Mantelfläche der Faser nicht erschöpft ist. Die Verbundspannungen parallel und senkrecht zur Kontaktebene verlaufen über die Verbundlänge nahezu konstant und erreichen dabei nicht annähernd den Grenzwert der initialen Verbundfestigkeit  $f_r = 10 \text{ N/mm}^2$ . Die Querkontraktion der Faser bewirkt eine Fehlpassung in der Grenzschicht, die zu Verbundnormalspannungen von ca.  $\tau_n = 0,75 \text{ N/mm}^2$  führt. Die Verbundschubspannungen hingegen verschwinden über etwa 80 % der Verbundlänge infolge der hohen Verbundsteifigkeit. Im Bereich des Faserendes ist aufgrund der Deformation des diskontinuierlichen Komposits eine geringfügige tangentielle Relativverschiebung zwischen Faser und Matrix möglich, die eine Verbundschubspannung auslöst, vgl.

Abbildung 6.8. Je nach tatsächlich vorhandener Verbundsteifigkeit kann beispielsweise infolge von Fehlstellen oder Imperfektionen an dieser Stelle der Kontaktzonenriss zwischen Faser und Matrix initiiert werden. Dieser würde eine fortschreitende Ablösung der Kontaktflächen voneinander entlang der Verbundlänge nach sich ziehen und entsprechend den veränderten Verbundmechanismen die wirksame Verbundkapazität beeinträchtigen.

Eine Überschreitung der Haftzugfestigkeit senkrecht zur Kontaktfläche ist für das vorliegende Verhältnis der Steifigkeiten von Faser und Matrix zueinander als unwahrscheinlich zu bewerten. Darüber hinaus zeigt der Vergleich der Varianten A und B, dass der gezeigte Verbundspannungsverlauf auch nach Ablösung der Stirnseite der Faser von der Matrix wahrscheinlich ausgebildet wird. Obwohl die numerisch ermittelten Spannungswerte im Bereich des Faserendes durch die Auswirkungen der Singularität mit dem tatsächlich vorhandenen Spannungs-Deformations-Zustand nicht übereinstimmen, lässt sich die zum Faserende hin ansteigende Verbundschubspannung nachvollziehen. Eine physikalisch realistische Größenordnung lässt sich mit dieser Modellierung hingegen nicht ableiten.

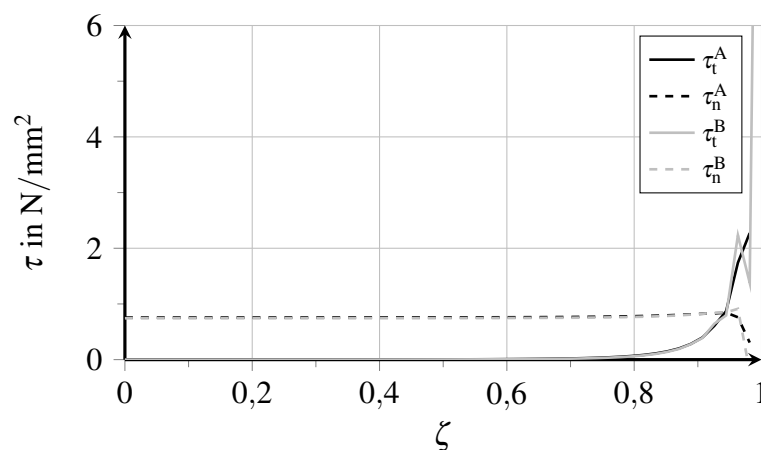


Abbildung 6.8: Verlauf der Verbundspannungen parallel und senkrecht zur Kontaktebene über die bezogene Verbundlänge

Die Untersuchungen der eingebetteten Faser zeigen ein auch im Rahmen von Faserauszugsimulationen häufig auftretendes Phänomen. Obwohl Faser und Matrix infolge der Längszugspannungen eine Querkontraktion erfahren, weist die Stirnseite des eingebetteten Faserendes Druckspannungen in Querrichtung auf, wie die folgende Abbildung 6.9 a) zeigt. Diese Spannung ist auf den infolge des starren Verbundes behinderten Dehnungsunterschied zwischen Faser und Matrix zurückzuführen. Insbesondere nach der Ablösung des Faserendes von der Matrix erzwingt der umgebende Faserkanal eine Überdrückung des nahezu spannungslosen Faserendes. Infolge dieser Verformung der Matrix um das weniger kontrahierte Faserende treten inelastische Dehnungen der Matrix seitlich der Faserstirnflächen auf, vgl. Abbildung 6.9 b). Da sich die inelastischen Dehnungen auch bei der Wahl kleinerer Strukturelemente nicht über ein größeres Gebiet ausdehnen, ist hier deutlich die Auswirkung der Singularität am scharfkantigen Faserende zu erkennen.

Trotzdem geben auch experimentelle Untersuchungen in der Literatur Hinweise auf eine mögliche Pfropfbildung der Faser im Faserkanal [BG79], wie in Kapitel 3.3 beschrieben. Die Entstehung eines überdrückten Querschnittsbereiches am nahezu spannungslosen Ende der ein-

gebundenen Faser ist zwar physikalisch plausibel, im Rahmen dieser Untersuchungen jedoch von untergeordneter Bedeutung. Die numerischen Analysen zum Faserauszugverhalten in Kapitel 6.2 geben Aufschluss auf die Bedeutung einer möglichen Pfropfenbildung für die Schädigung der Verbundzone. Abgesehen von numerischen Auswirkungen der Singularitätsstelle ist eine mechanische Verankerungswirkung durch den nicht kontrahierten Querschnitt im Bereich des Faserendes vorstellbar.

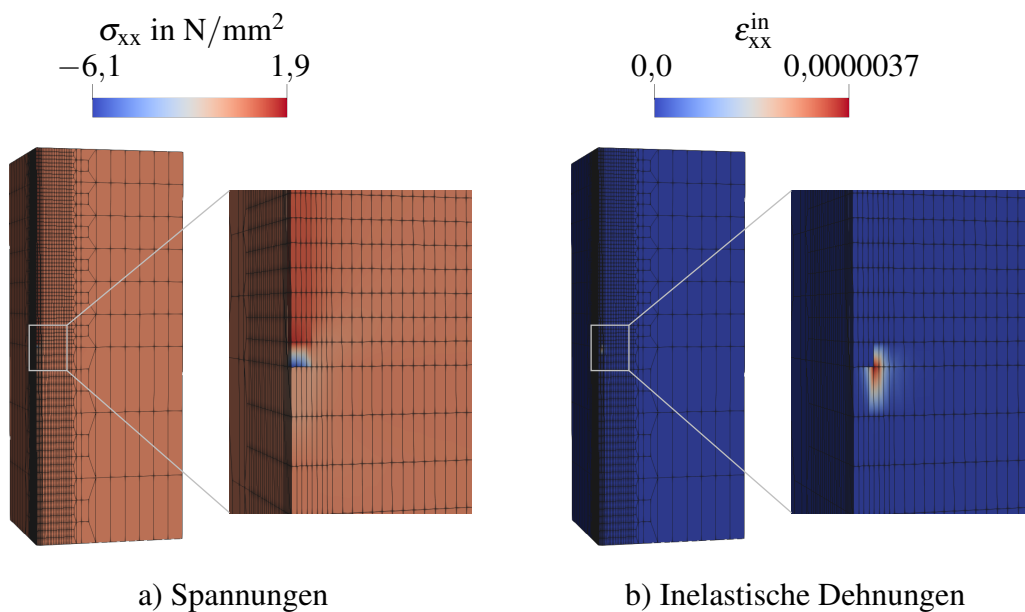


Abbildung 6.9: Darstellung der Spannungen und inelastischen Dehnungen im Faser-Matrix-Verbund nach Modellierungsvariante A in Faserquerrichtung

Zusammenfassend zeigt die numerische Analyse eines ungerissenen Faser-Matrix-Verbundes die Herausforderungen im Umgang mit numerischen und physikalischen Singularitätsstellen bei der Modellierung von Faserverbundwerkstoffen. Obwohl die errechneten Spannungs- und Dehnungswerte deutlich durch die Diskontinuität der Materialeigenschaften beeinflusst werden, lässt sich eine Tendenz hinsichtlich einer möglichen Schwachstelle des Komposits ableiten. Der Bereich um das eingebettete, starr mit der umgebenden Matrix verbundene Faserende weist bei einer gleichförmigen Zugbeanspruchung des Faser-Matrix-Verbundes Spannungsumlagerungen infolge der überschrittenen Betonzugfestigkeit und der daraus folgenden Rissprozesszone auf. Insgesamt ist damit eine hohe Wahrscheinlichkeit dafür gegeben, dass die Stirnseite der Faser von der Matrix abreißt und sich vom Faserende ausgehend ein Kontaktzonenriss entlang der Verbundlänge ausbildet, der die potenzielle Fasertragwirkung entscheidend verringert. Dabei beeinflussen neben Fehlstellen und Defekten unter Umständen auch kreuzende und benachbarte Fasern den Rissfortschritt im Faserverbundwerkstoff. Ein hoher Fasergehalt und eine optimale Faserverteilung verringern die Wahrscheinlichkeit für einen Rissverlauf von Faserende zu Faserende, bei dem die Verstärkungswirkung der Faserzugabe entfallen würde. Bei komplexen Beanspruchungssituationen hingegen ist davon auszugehen, dass die rissüberbrückende Fasertragwirkung effektiv aktiviert werden kann, sofern die ungleichförmig beanspruchte Betonmatrix im Bereich ihres am stärksten belasteten Querschnittes zu reißen beginnt.

## 6.2 Numerische Analyse des Faserauszugproblems

Faserauszugversuche dienen der experimentellen Analyse des Verbundverhaltens zwischen Faser und Matrix, vgl. Kapitel 3.3. Aufgrund der nichtlinearen Verbundspannungsverteilung entlang der Einbindelänge der Faser ist auf der Basis von Faserauszugversuchen jedoch kein allgemeingültiges Materialgesetz für die Verbundzone ableitbar. Darüber hinaus sind experimentelle Einzelfaserauszugversuche vor allem infolge von Imperfektionen und der Inhomogenität der Matrix signifikanten Streuungen unterworfen. Mithilfe des entwickelten Verbundmodells kann die Entwicklung der lokalen Verbundkapazität entlang der Verbundlänge, die durch Relativverschiebungen parallel und senkrecht zur Kontaktebene induziert wird, nachvollzogen werden. Von besonderem Interesse sind dabei die Kontaktzonenrissbildung, d. h. der Ablösungsvorgang zwischen den Kontaktoberflächen, und die Degradation des Verbundwiderstandes bei fortschreitendem Auszug der Faser aus der Matrix.

### 6.2.1 Vergleich ausgewählter Faserauszugversuche aus der Literatur

Zur Kalibrierung des Verbundmodells werden ähnliche Faserauszugversuche von drei verschiedenen Autoren verwendet, und zwar von QI ET AL., STENGEL und LANWER ET AL., vgl. [QWMW18], [Ste13], [LOE<sup>+</sup>19], [HKD<sup>+</sup>19]. Entsprechend dem angestrebten Anwendungsgebiet für das entwickelte Verbundmodell werden nur Einzelfaserauszugversuche mit Mikrostauffasern mit glatter Oberfläche und einer ultrahochfesten Feinkornbetonmatrix simuliert. Zur Kalibrierung des Modells eignen sich dabei nur jene Versuche, die das quasi-statische Auszugverhalten von geraden, senkrecht zur Matrixoberfläche eingebetteten Fasern ohne eine zusätzliche Beeinflussung des Verbundverhaltens durch die Einspannung des Probekörpers bis zum vollständigen Auszug der Faser aus der Matrix darstellen. Darüber hinaus sollten keine weiteren Versagensmechanismen, wie etwa Risse oder Bruchvorgänge im Beton oder das Fließen oder Reißen der Stauffaser, in den Versuchen aufgetreten sein.

Die ausgewählten Einzelfaserauszugversuche aus Nanjing, München und Braunschweig liefern das Auszugverhalten einer einzelnen geraden Mikrostauffaser aus einer unbewehrten, feinkörnigen UHPC-Matrix, dargestellt als Auszugwiderstand  $P$  über den Schlupf  $s$  an der Faserspitze. In allen Versuchen wird die Betonmatrix an ihrem unteren Ende mit ausreichendem Abstand zur darin eingebetteten Faser unverschieblich eingespannt respektive in die Prüfvorrichtung geklebt, sodass keine Beeinflussung des Auszugwiderstandes durch Querdruck induziert durch die Prüfmaschine selbst zu erwarten ist. Auch die Querschnittsfläche des Probekörpers wird ausreichend groß gewählt, um eine optimale Kraftübertragung zwischen Faser und Matrix zu gewährleisten, vgl. 5.2. Der grundsätzlich ähnliche Versuchsaufbau ermöglicht in allen drei Varianten eine Dehnung der Matrix in Beanspruchungsrichtung, sodass die gemessene Relativverschiebung neben dem tatsächlichen Schlupf und der Dehnung der Faser oberhalb des Faseraustrittsortes auch diesen Anteil enthält. Die Konfiguration des Versuchskörpers mit der jeweils gewählten Einbindelänge der Faser lässt an allen drei Standorten kein Versagen durch Faserreißen zu. Im Folgenden werden die Versuchsreihen kurz vorgestellt, bevor anhand einer Gegenüberstellung der Ergebnisse zur Kalibrierung des Verbundmodells im folgenden Kapitel übergeleitet wird.

Als Teil des Schwerpunktprogramms 2020 orientiert sich die Entwicklung des Verbundmodells, das im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt wird, u. a. an den experimentellen Untersuchungen innerhalb des Verbundforschungsprojektes, vgl. z. B. [HKD<sup>+</sup>19], [LOE<sup>+</sup>19]. Neben den zur Kalibrierung des entwickelten Verbundmodells verwendeten Versuchsergebnissen, vgl. Abbildung

6.10, stehen Ergebnisse von Auszugversuchen mit parallelen Fasergruppen mit unterschiedlichen Neigungswinkeln zur Verfügung, vgl. z. B. [EOL<sup>+</sup>20].

Die Versuchsserien umfassen Faserauszugversuche mit geraden Mikrostahtfasern, die einzeln oder in parallelen Fasergruppen in eine Matrix aus ultrahochfestem Feinkornbeton mit einer Druckfestigkeit von  $f_{cc} = 158,2 \text{ N/mm}^2$ , einer Zugfestigkeit von  $f_{ct} = 6,18 \text{ N/mm}^2$  und einem Elastizitätsmodul von  $E_c = 45\,400 \text{ N/mm}^2$  eingebettet sind [HKD<sup>+</sup>19]. Die Abmessungen und Materialkennwerte der Fasern unterliegen Messungen zufolge signifikanten Streuungen, beispielsweise weist der mithilfe einer speziellen Einspannvorrichtung getestete ungeschnittene Rohdraht bei einer Zugfestigkeit von  $f_{st} = 3\,575,8 \text{ N/mm}^2$  ein Elastizitätsmodul von ca.  $E_s = 168\,500 \text{ N/mm}^2$  auf [HKD<sup>+</sup>19]. Diese Diskrepanz kann auch als Hinweis für die Erklärung weiterer Abweichungen in den ebenfalls mithilfe der speziellen Einspannvorrichtung für die Fasern durchgeführten Faserauszugversuchen dienen. Für die folgenden Untersuchungen werden zur besseren Vergleichbarkeit der experimentellen Ergebnisse bezüglich der Materialkennwerte der Fasern mit Ausnahme der Zugfestigkeit die Herstellerangaben verwendet, vgl. [LOE<sup>+</sup>19]. Die Materialparameter sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

Als Probekörper werden schlanke Quader gewählt, die im unteren Viertel in die Probekörperhalterung der Prüfmaschine eingeklemmt werden. Erfasst werden während des weggesteuerten Auszuges der Faser aus der Matrix mit einer Beanspruchungsgeschwindigkeit von  $0,6 \text{ mm/min}$  die zum Auszug benötigte Zugkraft  $P$  und der Schlupf  $s$  an der Faserspitze, der aus dem Maschinenweg ermittelt wird [HKD<sup>+</sup>19]. In der folgenden Abbildung 6.10 ist das experimentell ermittelte Auszugverhalten der Fasern aus UHPC anhand von zwei exemplarisch ausgewählten Datensätzen dargestellt [HKD<sup>+</sup>19].

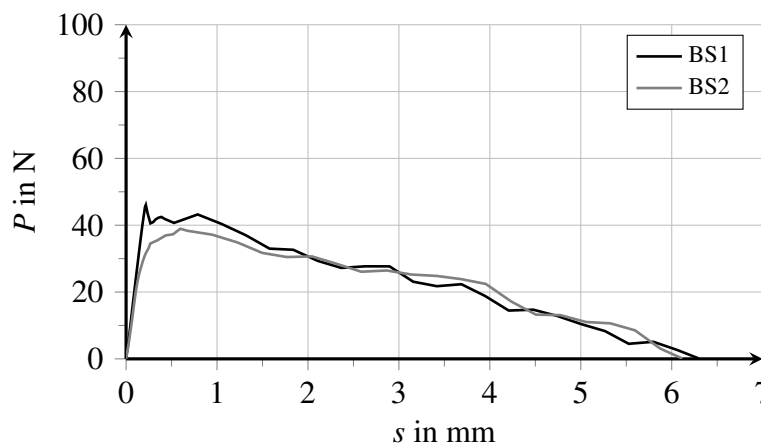


Abbildung 6.10: Versuchsergebnisse aus Braunschweig nach [HKD<sup>+</sup>19]

Die Versuchsserien unterliegen zum Teil erheblichen Streuungen, wobei einige Probekörper einen Auszugswiderstand von ca.  $40 \text{ N}$  zeigen, während andere eine wesentlich geringere Tragfähigkeit aufweisen, vgl. [HKD<sup>+</sup>19]. Die in Abbildung 6.10 dargestellten Datensätze unterscheiden sich nur geringfügig und eignen sich damit zur Kalibrierung des Verbundmodells. Beide Versuche weisen zunächst einen nahezu linearen Anstieg des Auszugswiderstandes auf. Während im Verlauf des Auszugswiderstandes zum Versuch BS1 ein Peak erkennbar ist, auf den zunächst ein schneller Lastabfall und dann ein annähernd linear abfallender Kurvenverlauf folgt, ist der Kurvenverlauf zu Versuch BS2 im Bereich des maximalen Auszugswiderstandes eher ausgerundet,

vgl. Abbildung 6.10. Im Vergleich mit dem charakteristischen Auszugverhalten nach Abbildung 3.9 deutet der annähernd linear abfallende Kurvenverlauf nach Ablösung der Faser auf eine geringe Degradation der Verbundkapazität hin. Beide Versuche erreichen einen maximalen Schlupf, der kleiner ist, als die angestrebte Einbindelänge der Fasern. Diese Diskrepanz weist auf Ungenauigkeiten in der Probekörpervorbereitung hin.

Auch auf die Versuche von STENGEL ist im Laufe dieser Arbeit mehrfach hingewiesen worden, da sie von umfassenden theoretischen Untersuchungen zu mikrophysikalischen Mechanismen und Phänomenen bezüglich der Fasertragwirkung von Mikrostahlfasern in ultrahochfestem Beton begleitet dokumentiert sind [Ste13]. Neben den zur Kalibrierung des entwickelten Verbundmodells verwendeten Versuchsergebnissen stehen weitere Ergebnisse von Einzelfaserauszugversuchen mit geneigt eingebetteten, geraden Fasern sowie mit gewellten Fasern mit einer Wellenlänge von 4 mm und einer Amplitude von 1,5 mm zur Verfügung, vgl. [Ste13].

STENGEL führt eine umfangreiche Versuchsserie mit insgesamt acht verschiedenen Betonzusammensetzungen und sechs unterschiedlichen Fasern durch, vgl. [Ste13]. Ausführliche Messergebnisse hinsichtlich des Auszugverhaltens liegen hingegen nur für einige wenige Versuche vor. In den für die Kalibrierung ausgewählten Versuchen wird ein ultrahochfester Feinkornbeton mit einer Druckfestigkeit von  $213 \text{ N/mm}^2$  und einem Elastizitätsmodul von  $E_c = 49800 \text{ N/mm}^2$  verwendet [Ste13]. Anstelle der zentrischen Zugfestigkeit wird die Spaltzugfestigkeit zu  $f_{csp} = 11,4 \text{ N/mm}^2$  bestimmt, aus der sich nach EUROCODE 2 die einaxiale Zugfestigkeit näherungsweise zu  $f_{ct} = 0,9 \cdot f_{csp} = 10,25 \text{ N/mm}^2$  abschätzen lässt [DIN11]. STENGEL bezieht für die Faserauszugversuche den hergestellten Faserrohdraht in ungeschnittener Länge, um eine für die Einspannung der Faser in die Prüfmaschine ausreichende freie Faserlänge zur Verfügung zu haben. Die verwendeten vermessigten Mikrostahlfasern mit einem Faserdurchmesser von  $d_f = 0,15 \text{ mm}$  weisen eine Zugfestigkeit von  $f_{st} = 3225 \text{ N/mm}^2$  auf, während die blanken Fasern mit einem Durchmesser von  $d_f = 0,48 \text{ mm}$  eine Zugfestigkeit von  $f_{ct} = 2610 \text{ N/mm}^2$  erreichen [Ste13]. Da die Messingschicht nach aktuellem Kenntnisstand keinen signifikanten Einfluss auf das Verbundverhalten hat, jedoch zur Herstellung der Fasern erforderlich ist, erfolgt in den folgenden Untersuchung keine Unterscheidung der Oberflächeneigenschaften.

Als Probekörper werden gedrungene Zylinder gewählt, die an ihrer Unterseite auf einer Probehalterplatte aufgeklebt sind. Als Ergebnisse der weggeordneten Versuche mit einer Belastungsgeschwindigkeit von  $1,8 \text{ mm/min}$  liegen verschiedene streuende Verläufe der zum Faserauszug benötigten Zugkraft  $P$  über den Schlupf  $s$  an der Faserspitze, der aus dem Maschinenweg überschlägig ermittelt wird, vor. Für einige Datensätze wird anstelle des Schlupfes an der Faserspitze der Schlupf am Faseraustrittsort angegeben, die aus dem Maschinenweg abzüglich der elastischen Faserdehnung im Bereich der freien Faserlänge ermittelt wird [Ste13]. Zum besseren Vergleich der Ergebnisse wird in der folgenden Abbildung 6.11 der Schlupf  $s$  an der Faserspitze angegeben. Die tatsächliche Einbindelänge der Faser in die Matrix weicht offenbar in beiden Versuchskörpern von der planmäßigen Einbindelänge  $\ell_e = 5 \text{ mm}$  ab.

In Abbildung 6.11 sind jeweils ein Datensatz zu Faserauszugversuchen mit einem Faserdurchmesser von  $d_f = 0,15 \text{ mm}$ , bezeichnet als MU1, und  $d_f = 0,48 \text{ mm}$ , bezeichnet als MU2, dargestellt. Beide Verläufe des Auszugwiderstandes über den Schlupf weisen den charakteristischen Peak mit anschließendem Lastabfall auf, vgl. Abbildung 3.9. Im Vergleich zu den Kurvenverläufen der Versuche aus Braunschweig in Abbildung 6.10 ist in beiden Verläufen in Abbildung 6.11 ein beschleunigter Abfall des Auszugwiderstandes zum Ende der Versuche zu erkennen. Gegenüber der annähernd linearen Abnahme der Zugkraft im Versuch MU2 verläuft der Auszugwiderstand

im Versuch MU1 bis zum Ende des Versuches in etwa konstant über den Schlupf. Demnach steigt der Verbundwiderstand in der Verbundzone bei fortschreitender Relativverschiebung und immer geringeren Verbundlängen signifikant an.

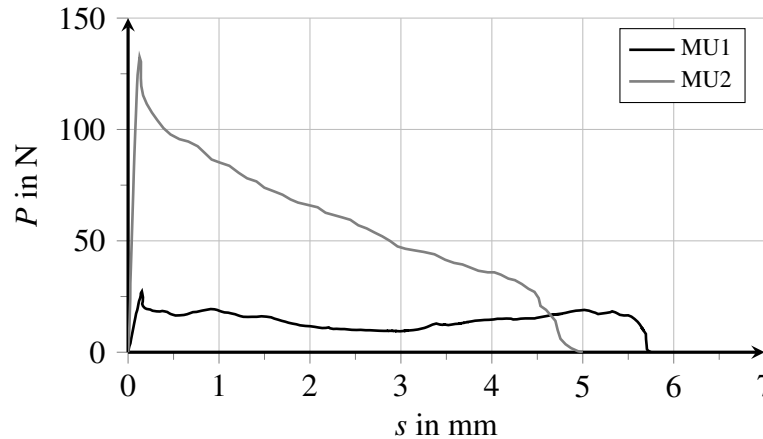


Abbildung 6.11: Versuchsergebnisse aus München aus [Ste13]

STENGEL verwendet eine Kraftmessdose, die bis zu einer Kraft von 500 N kalibriert ist [Ste13]. Üblicherweise ist die Messgenauigkeit unterhalb von 1 % der Maximallast mit Unsicherheiten belegt, d. h. gemessene Kräfte unterhalb von 5 N sind unter Umständen nicht exakt. Damit können Ungenauigkeiten der Messergebnisse als Erklärung der unerwarteten Verläufe wahrscheinlich ausgeschlossen werden. Als Ursache für den vermeintlichen Anstieg der Verbundspannungen zum Ende des Auszugversuches kommt eine maßgebliche Aktivierung des Verbundmechanismus Mikro-Interlocking infrage, vgl. [WN12]. Andererseits weisen die gemessenen maximalen Verschiebungen auch bei diesen Versuchen auf Ungenauigkeiten in der Probekörpervorbereitung hin. Gegebenenfalls übersteigt die Einbindelänge den erfassten, maximalen Schlupf deutlich. Das abrupte vorzeitige Versuchsende wäre in diesem Fall mit der Trägheit der Versuchseinrichtung zu rechtfertigen, durch die dieser Bereich kurz vor Versagen des Probekörpers nicht exakt erfasst werden kann. STENGEL selbst liefert keine Erklärung für den ermittelten Verlauf des Auszugwiderstandes, vgl. [Ste13].

Die Versuchsreihe von QI ET AL. ist bereits in Kapitel 3.3 als Beispiel für Einzelfaserauszugversuche mit geraden Mikrostaahlfasern in UHPC dargestellt, vgl. Abbildung 3.7. Neben den zur Kalibrierung des entwickelten Verbundmodells verwendeten, aus jeweils fünf Versuchen gemittelten Versuchsergebnissen stehen weitere Ergebnisse von Einzelfaserauszugversuchen mit geneigt eingebetteten, geraden Fasern sowie gerade und geneigt eingebetteten Fasern mit Endverankerung, ebenfalls in Form einer Mittelwertkurve, zur Verfügung, vgl. [QWMW18].

QI ET AL. verwenden ultrahochfesten Feinkornbeton, für den ausschließlich die Druckfestigkeit als einziger Materialkennwert angegeben wird [QWMW18]. Für die hochfesten Mikrostaahlfasern mit einer Länge von  $\ell_f = 13 \text{ mm}$  und einen Faserdurchmesser von  $d_f = 0,2 \text{ mm}$  werden offenbar die Angaben des Faserherstellers anstatt eigener Messergebnisse verwendet, vgl. [QWMW18]. Die angegebene Zugfestigkeit  $f_{st} = 2900 \text{ N/mm}^2$  und der Elastizitätsmodul  $E_s = 200000 \text{ N/mm}^2$  sind daher als konservative Werte zu betrachten. Die Autoren machen keine Angaben hinsichtlich einer Beschichtung der Faser, sodass aufgrund des geringen Faserdurchmessers von einer Messingbeschichtung ausgegangen wird, die für die Herstellung

erforderlich ist. Für die folgenden Untersuchungen werden die angegebenen Materialparameter um sinnvolle Annahmen ergänzt, vgl. Tabelle 6.1.

Als Probekörper wird die Form eines halben „Hundeknochens“ gewählt und ab Beginn der Rundung vollständig in eine Prüfvorrichtung eingespannt, vgl. Abbildung 3.6. Als Ergebnis der weggeregelten Versuche mit einer Beanspruchungsgeschwindigkeit von 1,0 mm/min liegt der gemittelte Verlauf der zum Faserauszug benötigten Zugkraft  $P$  über den Schlupf  $s$  an der Faserspitze vor, vgl. Abbildung 3.7, [QWMW18]. Ergebnisse der einzelnen Versuche innerhalb der unterschiedlichen Serien liegen nicht vor, vgl. [QWMW18]. Die gemittelten Versuchsdaten weisen im Bereich des maximalen Verbundwiderstandes einen vergleichsweise ausgerundeten Kurvenverlauf auf. Die vorliegende Mittelwertkurve ist daher nur bedingt zur Kalibrierung des Verbundmodells geeignet. Die folgende Abbildung 6.12 zeigt den verwendeten Datensatz.

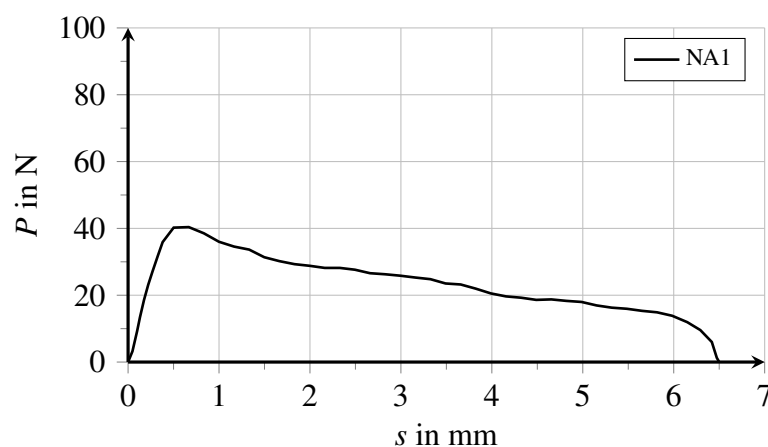


Abbildung 6.12: Mittelwertlinie der Versuchsergebnisse aus Nanjing aus [QWMW18]

Die Mittelwertkurve der Versuchsserie mit fünf Probekörpern verläuft aufgrund der üblichen Streuungen in Einzelfaserauszugversuchen erwartungsgemäß glatter und zeigt nur eine Andeutung eines Peaks mit anschließendem Lastabfall, vgl. Abbildung 6.12. Der maximale Auszugwiderstand stimmt näherungsweise mit dem in Braunschweig gemessenen Extremwert überein, was aufgrund der ähnlichen Fasergeometrie und Einbindelänge und unter Berücksichtigung der infolge von Streuungen im Allgemeinen geringeren Mittelwerte den Erwartungen entspricht. Allerdings wird dieser Maximalwert erst nach einer deutlich größeren Relativverschiebung erreicht als bei den Versuchen in Abbildung 6.10. Neben Schlupf aus der Versuchseinrichtung kommt auch die Mittelwertbildung selbst als mögliche Ursache für diese Differenz infrage. Darüber hinaus enthalten die Messergebnisse Dehnungen der Betonmatrix, die bei QI ET AL. aufgrund der gewählten Probekörpergeometrie signifikant höher als bei den Versuchen aus München und Braunschweig sind. Wie die Versuche von STENGEL werden auch diese Versuche offenbar durch einen plötzlichen Lastabfall abrupt beendet. Anders als in München werden in Nanjing Kraftmessdosen mit einer Kalibrierung bis 5 000 N verwendet, d. h. bei gleichem prozentualen Genauigkeitsschwellenwert von 1 % sind Kraftmesswerte unterhalb von 50 N mit Unsicherheiten belegt. Über die Genauigkeit der Probekörperherstellung lässt sich anhand dieser Mittelwertkurve keine Aussage treffen. Aufgrund der ähnlichen Versuchseinrichtung und Probekörpervorbereitung ist von gewissen Ungenauigkeiten bzgl. der Einbindelängen und -neigungen auszugehen.



Die folgende Tabelle 6.1 fasst die wesentlichen Kennwerte der ausgewählten Faserauszugversuche aus Braunschweig, München und Nanjing zusammen. Für die numerische Simulation der Einzelfaserauszugversuche werden die Materialkennwerte der Komponenten Faser und Matrix übernommen. Die Querdehnzahl von ultrahochfesten Feinkornbeton wird entsprechend der Literatur zu  $\nu_c = 0,18$  abgeschätzt, vgl. [DAf08]. Das Verbundmodell wird im folgenden Kapitel für die Beschreibung von verschieblichem Verbund kalibriert.

Tabelle 6.1: Merkmale der ausgewählten Faserauszugversuche aus der Literatur

Parameter	Einheit	Braunschweig	München	Nanjing
Faserdurchmesser $d_f$	mm	0,19 <sup>H</sup>	0,15; 0,48	0,2 <sup>H</sup>
Drahtlänge $\ell_D$	mm	16,5	10,0	13,0 <sup>A</sup>
Fasereinbindelänge $\ell_e$	mm	6,5	5,0	6,5
Zugfestigkeit $f_{st}$	N/mm <sup>2</sup>	3 575,8	3 225,0; 2 610,0	2 900,0 <sup>H</sup>
Elastizitätsmodul $E_s$	N/mm <sup>2</sup>	200 000,0 <sup>H</sup>	200 000,0 <sup>H</sup>	200 000,0 <sup>H</sup>
Querdehnzahl $\nu_s$	—	0,3 <sup>A</sup>	0,3 <sup>A</sup>	0,3 <sup>A</sup>
Matrixhöhe $h_m$	mm	40,0	15,0	40,0 <sup>U</sup>
Matrixbreite $b_m$	mm	10,0	35,0	30,0
Druckfestigkeit $f_{cc}$	N/mm <sup>2</sup>	158,2	213,0	151,5
Zugfestigkeit $f_{ct}$	N/mm <sup>2</sup>	6,18	10,26 <sup>U</sup>	8,0 <sup>A</sup>
Elastizitätsmodul $E_c$	N/mm <sup>2</sup>	45 400,0	49 800,0	45 000,0 <sup>A</sup>
Querdehnzahl $\nu_c$	—	0,18 <sup>A</sup>	0,18 <sup>A</sup>	0,18 <sup>A</sup>

<sup>H</sup> Herstellerangabe

<sup>A</sup> Annahme

<sup>U</sup> Umrechnung aus vorhandenen Angaben

### 6.2.2 Kalibrierung des Verbundmodells

Die Kalibrierung des entwickelten Verbundmodells erfolgt auf Basis der experimentellen Ergebnisse der ausgewählten Einzelfaserauszugversuche, dargestellt in den Abbildungen 6.10, 6.11 und 6.12. Das lokale Verbundverhalten lässt sich jedoch nicht aus dem experimentell erfassten Auszugverhalten ableiten, da die Verteilung von Verzerrungen und Spannungen entlang der Verbundlänge zu keinem Zeitpunkt während des Faserauszugversuches bekannt ist. Wie in Kapitel 3.3 erläutert, sind nichtlineare Verläufe der lokalen Relativverschiebungen und Verbundspannungen entlang der Verbundlänge zu erwarten, die sich mit fortschreitendem Faserauszug verändern. Beeinflusst werden diese Verläufe durch eine Reihe von lokalen Faktoren, die nach derzeitigem Stand der Technik experimentell nicht zu erfassen sind, vgl. Kapitel 3.4. Anders als bei Auszugversuchen von konventionellem Bewehrungsstahl sind weder die über den Auszug veränderliche Verbundlänge noch der tatsächliche Schlupf zwischen den Komponenten bekannt, vgl. Kapitel 3.3. Dabei weicht der Schlupf am eingebetteten, lastfreien Ende infolge von Dehnungen der Stahlfaser insbesondere während der fortschreitenden Ablösung zwischen Faser und Matrix vom messbaren Schlupf am Faseraustrittsort ab.

Für die Kalibrierung des entwickelten Verbundmodells wird daher zunächst die veränderliche Verbundlänge näherungsweise bestimmt. Der Bezug der gemessenen Ausziehlast auf die Ver-

bundfläche liefert dann eine mittlere Verbundspannung, mit der im Rahmen dieser Arbeit die Auswertung des Auszugverhaltens erfolgt.

Der gemessene Schlupf  $s$  an der Faserspitze enthält neben der Relativverschiebung in der Verbundzone auch Längsdehnungen von Faser und Matrix. Da die Zugspannungen und damit die Längsdehnungen in der Matrix neben und unterhalb des Verbundbereiches gering ausfallen, werden sie für die näherungsweise Ermittlung der Verbundlänge vernachlässigt. Der Schlupf am lastfreien Faserende entspricht dann näherungsweise der absoluten Verschiebung des Faserendes. Dieser Faserendschlupf, gemäß RITTER bezeichnet als  $s_0$ , ist abhängig vom Verlauf der Faserlängsdehnung im Bereich oberhalb der Matrixoberkante und im Verbundbereich, der im Folgenden überschlägig ermittelt wird, vgl. [Rit14].

Zwischen der Matrixoberkante und der Lasteinleitung an der Faserspitze verläuft die Längsdehnung der Stahlfaser, die während des gesamten Faserauszuges linear-elastisches Materialverhalten aufweist, konstant. Im Verbundbereich ist die Faserlängsdehnung vom veränderlichen Integral des lokalen Verbundwiderstandes über die Verbundlänge, d. h. vom Auszugwiderstand, abhängig. Vereinfachend wird in diesem Bereich ein linearer Verlauf der Faserdehnungen angenommen, wobei die Längsdehnungen der Faser am unbelasteten Faserende verschwinden. Während diese Annahme den Dehnungsverlauf in der Stahlfaser bis zur vollständigen Ablösung zwischen Faser und Matrix, d. h. in den Auszugphasen I und II, weniger gut approximiert, da bis zur vollständigen Ablösung der Kontaktflächen voneinander theoretisch auch in der Mitte der Faserunterseite eine Kraftübertragung und damit eine Längsdehnung am Faserende erfolgen kann, stellt sie eine gute Näherung für die Beschreibung der Faserauszugphase dar, vgl. Kapitel 3.3.

Der Faserendschlupf  $s_0$  ergibt sich aus dem gemessenen Schlupf  $s$  an der Faserspitze abzüglich der akkumulierten Verschiebung entlang der gedehnten Faser zu

$$s_0 = s - \int_{\ell_f} \epsilon_{zz,f}(z) dz. \quad (6.15)$$

Die Integration der angenommenen Faserlängsdehnungen über die Faserlänge kann in Abhängigkeit der Faserdehnung  $\epsilon_{zz,f}$  außerhalb des Verbundbereiches

$$\epsilon_{zz,f} = \frac{P}{A_f \cdot E_s} \quad (6.16)$$

mit der Ausziehlast  $P$  bezogen auf die Querschnittsfläche der Faser  $A_f$  unter Vernachlässigung ihrer Querkontraktion und den Elastizitätsmodul  $E_s$  beschrieben werden. Die Verbundlänge  $\ell_b$  wird mit dem Auszug der Faser um den Faserendschlupf reduziert entsprechend

$$\ell_b = \ell_e - s_0, \quad (6.17)$$

während sich die freie Faserlänge  $\Delta\ell_f$  außerhalb des Verbundbereiches gleichermaßen um den Faserendschlupf vergrößert. Der Faserendschlupf entspricht dann nach Integration der Faserdehnungen über beide Bereiche entsprechend Gleichung (6.15) mithilfe  $\epsilon_{zz,f}$  nach Gleichung (6.16) zu

$$s_0 = s - (\Delta\ell_f + s_0) \cdot \epsilon_{zz,f} - (\ell_e - s_0) \cdot \frac{1}{2} \cdot \epsilon_{zz,f} \quad (6.18)$$

nach Umstellung der Bestimmungsgleichung (6.18)

$$s_0 = \frac{s - \left( \Delta \ell_f + \frac{\ell_e}{2} \right) \cdot \epsilon_{zz,f}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \epsilon_{zz,f}} \quad (6.19)$$

und kann so direkt aus den Messergebnissen eines Faserauszugversuches ermittelt werden.

Mit der abnehmenden Verbundlänge reduziert sich auch die zur Kraftübertragung zur Verfügung stehende Verbundfläche  $A_b = \pi \cdot d_f \cdot \ell_b$ . Die mittlere Verbundspannung  $\tau_{bz,m}$  parallel zur Auszugrichtung ergibt sich demnach aus der gemessenen Kraft bezogen auf die veränderliche Verbundfläche zu

$$\tau_{bz,m} = \frac{P}{A_b}. \quad (6.20)$$

Die näherungsweise Ermittlung einer Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung stellt für große Relativverschiebungen und vergleichsweise kurze Einbindelängen eine gute Approximation der lokalen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung dar und ist im Hinblick auf die Kalibrierung des Verbundmodells im Rahmen dieser Arbeit ausreichend genau. Dabei liegt der Fokus auf der Entwicklung der Verbundkapazität nach der Ablösung der Faser von der Matrix, vgl. Abbildung 3.12. In den ersten beiden Phasen des Auszugverhaltens nach Kapitel 3.3 weicht die mittlere Verbundspannung dagegen signifikant vom lokalen Verbundwiderstand ab, sodass die Approximation der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung in diesen Bereichen als unzureichend gilt. Die maximale Verbundfestigkeit wird durch die Mittelwertbildung über die Verbundlänge deutlich unterschätzt. Die Kalibrierung der Modellparameter für den starren Verbund ist somit erschwert und mit Unsicherheiten belegt.

Wie im vorigen Abschnitt angemerkt, ist bei der Auswertung von Einzelfaserauszugversuchen mit einer gewissen Ungenauigkeit hinsichtlich der tatsächlichen Einbindelängen und -neigungen zu rechnen. Die Betrachtung des spontanen Lastabfalles am Ende einiger Datensätze in den Abbildungen 6.10, 6.11 und 6.12 lässt zwei grundsätzlich verschiedene Schlüsse zu. Entweder stimmt die in der jeweiligen Versuchsbeschreibung angegebene Einbindelänge infolge von herstellungsbedingten Imperfektionen oder Fehlstellen in der Grenzschicht nicht mit der tatsächlichen Verbundlänge im Initialzustand überein, oder die Verbundkapazität wird zum Ende der Faserauszugversuche durch verfestigende Verbundmechanismen wie das Mikro-Interlocking dominiert und wächst deutlich an. Im ersten Fall sind die tatsächlichen Einbindelängen näherungsweise durch eine lineare oder nichtlineare Extrapolation des abnehmenden Auszugwiderstandes im Bereich des plötzlichen Lastabfalles zu bestimmen. Die Ermittlung der gemittelten Verbundspannungen muss sich dann auf diese größeren Einbindelängen beziehen. Die Versuchsdaten können für diese Variante nur bis kurz vor dem plötzlichen Lastabfall ausgewertet werden. In der zweiten Variante entsprechen die Einbindelängen den maximalen Beträgen des Schlupfes. Abweichend von der Modellbeschreibung in Kapitel 4.2 ist eine Verfestigung des lokalen Verbundwiderstandes infolge der Verbundzonenschädigung zu berücksichtigen, wie auch von WILLE & NAAMAN beobachtet [WN12].

Zur Kalibrierung des Verbundmodells wird für beide Interpretationsvarianten der Versuchsdaten je ein Modellparametersatz bestimmt, der das Verbundverhalten in den ausgewählten Faserauszugversuchen möglichst allgemeingültig beschreibt. Die Simulation der unterschiedlichen Versuchskonfigurationen erlaubt anschließend eine Auswertung der Einflüsse auf das Auszug-

verhalten. Dieses Vorgehen stellt eine gute Vergleichbarkeit der Versuchskonfigurationen nach Tabelle 6.1 sicher, führt aber auch zu unterschiedlich großen Abweichungen der Simulationsergebnisse von den Versuchsdaten. Auf eine Mittelwertbildung der Versuchsdaten wird dabei verzichtet, um den typischen Verlauf der Verbundspannungen über den Schlupf am Faserende zu erhalten. Das Materialmodell für die Verbundzone mit linearen Ansätzen für die Degradationsfunktion  $\psi(d)$  und das Schädigungsentwicklungspotenzial  $\beta(d)$  erfordert die Kalibrierung von insgesamt acht Modellparametern, vgl. Kapitel 4.2. Da in allen Versuchen glatte Faseroberflächen und ein näherungsweise homogenes Gefüge des verwendeten Feinkorn-UHPCs auftreten, wird auf die Modellierung von anisotropem Verbundverhalten verzichtet, d. h. der Anisotropiebeiwert  $\lambda$  wird zu 1,0 gesetzt.

In der folgenden Abbildung 6.13 sind die rechnerisch ermittelten Verläufe der Verbundschubspannungen nach Gleichung (6.20) über den Faserendschlupf der Faserauszugversuche für die erste Variante dargestellt. Dabei werden zum Teil um mehr als einen Millimeter vergrößerte Einbindelängen  $\ell_{e,1}$  angenommen als in den Versuchsbeschreibungen angegeben, vgl. Tabelle 6.2. Die Probekörper versagen nach dieser Interpretation ruckartig vor dem Erreichen der maximalen Schlupfwerte. Die kurz vor Versuchsende erfassten Messwerte des Auszugswiderstandes sind als zu niedrig und die mittlere Verbundspannung in diesem Bereich als nicht repräsentativ zu bewerten. In Abbildung 6.13 ist zudem die Entwicklung der lokalen Verbundkapazität infolge des auf dieser Datengrundlage kalibrierten Verbundmodells über die Relativverschiebung dargestellt. Die zugehörigen Modellparameter sind in Tabelle 6.3 zusammengefasst.

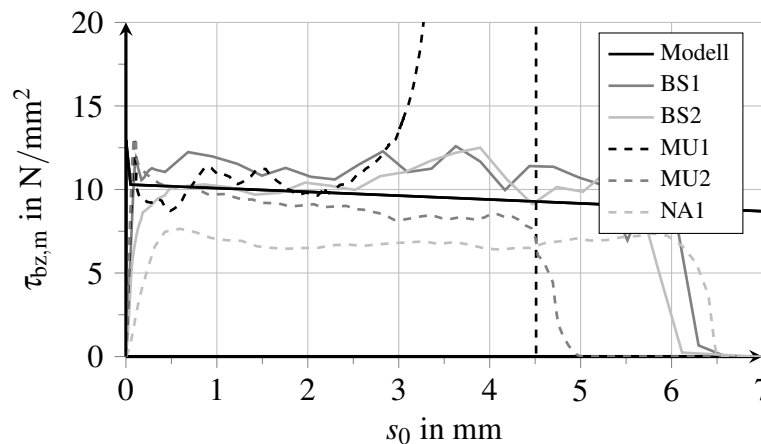


Abbildung 6.13: Mittlere Verbundspannung über Faserendschlupf mit korrigierten Fasereinbindelängen  $\ell_{e,1}$  und entsprechend modelliertes Verbundverhalten

Durch den Bezug auf die korrigierten Fasereinbindelängen  $\ell_{e,1}$  nach Tabelle 6.2 ergeben sich in Abbildung 6.13 für alle Versuchsergebnisse eine ähnliche Größenordnung und vergleichbare Verläufe der mittleren Verbundspannung nach Gleichung (6.20) über den Faserendschlupf. Die rechnerische Verbundschubspannung zum gemittelten Datensatz NA1 aus Nanjing liegt erwartungsgemäß infolge der darin enthaltenen Streuungen der Einzelversuche etwas unterhalb der übrigen Werte und weist keinen charakteristischen Maximalwert mit anschließendem Spannungsabfall auf. Die Ermittlung einer Verbundspannung für den Datensatz MU2 aus München zum Faserauszugversuch mit einer sehr schlanken Faser ergibt einen auffällig steil ansteigenden Verlauf, der eventuell auf Messungenauigkeiten zurückzuführen ist. Die Umrechnung der übrigen Versuchsdaten führt auf plausible Verbundspannungsverläufe, vgl. Abbildung 6.13.

Tabelle 6.2: Fasereinbindelängen nach Versuchsangaben und eigener Ermittlung

Parameter	Einheit	BS1	BS2	MU1	MU2	NA1
Angegebene Fasereinbindelänge $\ell_{e,0}$	mm	6,5	6,5	5,0	5,0	6,5
Ermittelte Fasereinbindelänge $\ell_{e,1}$	mm	6,6	6,9	4,5	6,8	9,0
Ermittelte Fasereinbindelänge $\ell_{e,2}$	mm	6,30	6,12	5,75	5,0	6,5

Das Verbundverhalten gemäß der Auswertung in Abbildung 6.13 weist die charakteristischen Phasen von starrem und verschieblichem Verbund auf, wobei sowohl ein Spannungsabfall im Bereich des Debondings, als auch eine allmähliche Degradation der Verbundkapazität infolge einer wachsenden Verbundzonenschädigung festzustellen ist. Der insgesamt hohe Verbundwiderstand nimmt dabei mit zunehmender Relativverschiebung nur geringfügig ab. Da äußerlich angreifender Querdruck im Verbundbereich bei allen Versuchsaufbauten auszuschließen ist, wird der Verbundwiderstand bei Relativverschiebungen durch Mikro-Interlocking und Gleitreibung infolge einer verschiebungsinduzierten Querdruckentwicklung durch die behinderte Aufweitung in der Verbundzone generiert, vgl. Kapitel 3.1 und 3.4. Die Verbundqualität ist demnach als eher gut zu bewerten, da trotz der Abrasion der Kontaktoberflächen und Bewegung von Partikeln innerhalb der Grenzschicht nur ein geringes Maß an Schädigung wirksam die Verbundkapazität beeinträchtigt.

Tabelle 6.3: Parametersatz nach Variante a) für das Materialmodell der Verbundzone

Parameter	Symbol	Einheit	
Verbundsteifigkeitsmodul	$E_r$	N/mm <sup>3</sup>	13 000,0*
Verbundfestigkeit (starrer Verbund)	$f_r$	N/mm <sup>2</sup>	13,0
Verbundfestigkeit (versch. Verbund)	$f_s$	N/mm <sup>2</sup>	10,3
Anisotropiebeiwert ( $f_{\perp}/f_{\parallel}$ )	$\lambda$		1,0
Schädigung infolge Debonding	$d_d$	—	0,002
Reibkoeffizient	$\mu$	—	0,15
Querdruckentwicklungskoeffizient	$\eta$	—	0,001
Schädigungswachstumsfaktor	$\alpha$	—	0,025

\*  $s_c = 0,001$  mm

Der in Abbildung 6.13 dargestellte mittlere Verbundwiderstand lässt bei Voraussetzung eines nichtlinearen Verbundspannungsverlaufes entlang der Fasereinbindelänge keine Rückschlüsse auf die maximale lokale Verbundfestigkeit im starren Verbund, die Verbundsteifigkeit und die Schädigung infolge der Ablösung zu. Des Weiteren ist eine Quantifizierung der verschiebungsinduzierten Querdruckentwicklung in der Verbundzone ohne vorliegende Messergebnisse zur Kontaktpressung schwierig, da sich erst im Zusammenspiel mit der querdruckunabhängigen Verbundkapazität der lokale Verbundwiderstand ergibt. In die Kalibrierung des Verbundmodells auf der Basis des Faserauszugverhaltens müssen daher auch Einschätzungen der Größenordnung einiger Modellparameter entsprechend der Literatur einfließen. STENGEL schlägt auf der Grundlage eigener Literaturrecherchen sowie der durchgeführten Versuche als initialen Reibkoeffizient  $\mu = 0,15$  vor [Ste13]. Die maximale lokale Verbundfestigkeit kann nach STENGEL zu etwa

$f_r = 0,086 \cdot f_{cc}$  oder  $f_r = 1,05 \cdot \sqrt{f_{cc}}$  angenommen werden [Ste13]. Für eine einaxiale Druckfestigkeit von  $f_{cc} = 150 \text{ N/mm}^2$  ergeben beide Faustformeln eine initiale Verbundfestigkeit von etwa  $f_r = 13 \text{ N/mm}^2$ , welche die gemessene Zugfestigkeit des Matrixmaterials übersteigt. Die Verbundsteifigkeit wird den eigenen Voruntersuchungen in den Kapiteln 5.2 und 5.3 entsprechend als hoch angenommen, sodass die stabile Ablösung der Faser von der Matrix nachvollzogen werden kann. Die Modellparameter der Kalibrierung für die erste Interpretationsvariante der Versuchsdaten sind in Tabelle 6.3 zusammengefasst.

Für die zweite Auswertung der Versuchsdaten sind die in den Versuchsbeschreibungen angegebenen Fasereinbindelängen ebenfalls zu korrigieren. Dafür wird der maximale Faserendschlupf der initialen Verbundlänge gleichgesetzt und zur Umrechnung des Auszugswiderstandes in einen gemittelten Verbundwiderstand herangezogen. Die korrigierten Fasereinbindelängen  $\ell_{e,2}$  sind in Tabelle 6.2 angegeben. Die rechnerisch ermittelten Verläufe der mittleren Verbundschubspannungen nach Gleichung (6.20) über den Faserendschlupf sind in der folgenden Abbildung 6.14 dargestellt. Zum Vergleich ist außerdem das modellierte Verbundverhalten nach der Kalibrierung für diese Darstellung der Versuchsergebnisse abgebildet. Die zugehörigen Modellparameter sind in Tabelle 6.4 angegeben.

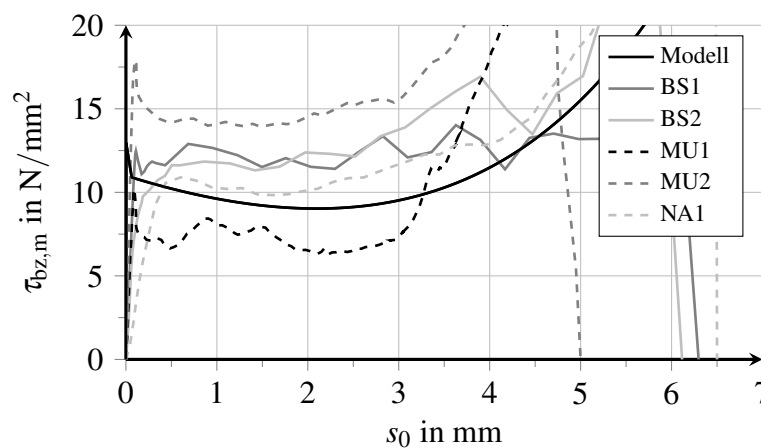


Abbildung 6.14: Mittlere Verbundspannung über Faserendschlupf mit korrigierten Fasereinbindelängen  $\ell_{e,2}$  und entsprechend modelliertes Verbundverhalten

Gegenüber den absteigenden Verläufen der mittleren Verbundspannungen über den Faserendschlupf in Abbildung 6.13 zeigt die Abbildung 6.14 für alle Datensätze ansteigende Verbundspannungsverläufe. Nach dem ersten Maximalwert des mittleren Verbundwiderstandes erfolgt die Ablösung der Faser von der Matrix, die zunächst mit einer Verringerung des verbleibenden Verbundwiderstandes einhergeht. Dabei liegen die maximalen Verbundwiderstände bis zum Ende des Debondings nicht für alle Daten in derselben Größenordnung. Die Versuche aus München, deren Matrix aus demselben UHPC mit einer sehr hohen Druckfestigkeit besteht, erreichen unterschiedliche mittlere Verbundspannungen im starren Verbund. Insbesondere zum Ende des Faserauszuges scheint die Verbundkapazität bei allen Versuchen nahezu exponentiell zuzunehmen, vgl. Abbildung 6.14. Nach WILLE & NAAMAN liegt die Ursache für die ansteigenden Verbundspannungsverläufe in ausgeprägtem Mikro-Interlocking, das auf eine gute Verzahnung und dichte Partikelpackung mit abgestimmten, unterschiedlichen Korngrößen im UHPC im Bereich der Grenzschicht zurückzuführen ist [WN12]. Dieser Hypothese widersprechen die verschiedenen Größenordnungen und Verläufe, die sich für die Münchener Versuche ergeben, wenn

eine vergleichbare Betonqualität im Bereich der Grenzschicht vorausgesetzt wird. Dennoch wird die Simulation der Faserauszugversuche mit den Parametern der zweiten Kalibrierungsvariante nach entsprechenden Modellmodifikationen durchgeführt, um die Auswirkungen einer infolge Relativverschiebungen verstärkten Verbundwirkung zu untersuchen.

Die Modellierung eines solchen Verbundverhaltens erfordert die Modifikation der Degradationsfunktion (4.46), sodass anstelle einer Degradation eine Verfestigung des Verbundverhaltens beschrieben werden kann, vgl. Kapitel 4.2. Ein zusätzlicher Summand wirkt mit zunehmender Verbundzonenschädigung  $d$  der Degradation der Verbundkapazität entgegen und kehrt die Entwicklung schließlich um, sodass mit

$$\psi(d) = 1 - d + \left( \frac{\gamma \cdot d}{1 - d} \right)^2 \quad (6.21)$$

eine verstärkte Wirkung des Mikro-Interlockings darstellbar ist. Dabei wird vereinfachend das Verkeilen verschmiert über die Verbundlänge erfasst und nicht als lokales Event. Die Funktion ist so gewählt, dass mit zunehmender Schädigung ein größer werdender Einfluss des räumlich begrenzten Verkeilens generiert wird. Die zugehörige Ableitung der modifizierten Degradationsfunktion lautet

$$\frac{\partial \psi}{\partial d} = -1 + \frac{2 \cdot \gamma^2}{(1 - d)^3}, \quad (6.22)$$

vgl. Kapitel 4.2. Je nach Wahl des zusätzlichen Modellparameters  $\gamma$  setzt bei geringen Schädigungsbeträgen zunächst eine Degradation der Verbundkapazität ein, bevor bei fortgeschrittener Schädigung schließlich die verfestigende Wirkung dominiert. Neben der Entwicklung der Verbundkapazität  $\tau_{\text{lim}}$  werden auch Veränderungen des Reibkoeffizienten  $\mu$  und der Querdruckentwicklungskoeffizienten  $\eta$  durch die Degradationsfunktion beschrieben. Die Wahl von  $\gamma = 0$  deaktiviert die Verfestigung infolge von Mikro-Interlocking vollständig.

Das entwickelte Verbundmodell ist mit dieser Modifikation in der Lage, die Wahrscheinlichkeit für ein Verkeilen der Partikel in der Grenzschicht abzubilden. Dabei wird die Auswirkung eines lokalen, auf eine minimale Verbundlänge begrenzten Events auf den allgemeinen Verbundwiderstand für diesen Schädigungszustand bezogen. So kann ein gleichmäßiger Anstieg des Verbundwiderstandes generiert werden, was das Modell unabhängig von lokalen Imperfektionen und Inhomogenitäten macht. Ausgewertet werden kann mit dieser Formulierung der Einfluss eines ansteigenden Verbundwiderstandes auf das Auszugverhalten. Da der überproportionale Anstieg der übertragbaren Verbundspannungen bei einer stark geschädigten Verbundzone in Gleichung (6.21) nicht begrenzt ist, tendiert eine Modellierung von Faserauszugversuchen mit langen Verbundlängen zu sehr großen Verbundwiderständen und damit zu einem Versagen durch Faserreißen.

Das angenommene Verbundverhalten in der Phase des verschieblichen Verbundes deutet auf eine sehr hohe Verbundqualität in der Grenzschicht hin. Dabei sind Rückschlüsse auf die Adhäsion und Verzahnung zwischen Faser und Matrix nicht begründet zulässig, sofern die Wahrscheinlichkeit des Verkeilens von Partikeln beim Faserauszug nach WILLE & NAAMAN nicht durch die Faseroberfläche, sondern ausschließlich durch das Betongefüge beeinflusst wird. Die Modellparameter der Kalibrierung für diese Auswertung der Versuchsdaten sind in Tabelle 6.4 zusammengefasst.

Tabelle 6.4: Parametersatz nach Variante b) für das Materialmodell der Verbundzone

Parameter	Symbol	Einheit	
Verbundsteifigkeitsmodul	$E_r$	N/mm <sup>3</sup>	13 000,0*
Verbundfestigkeit (starrer Verbund)	$f_r$	N/mm <sup>2</sup>	13,0
Verbundfestigkeit (versch. Verbund)	$f_s$	N/mm <sup>2</sup>	11,0
Anisotropiebeiwert ( $f_{\perp}/f_{\parallel}$ )	$\lambda$	—	1,0
Schädigung infolge Debonding	$d_d$	—	0,01
Reibkoeffizient	$\mu$	—	0,15
Querdruckentwicklungskoeffizient	$\eta$	—	0,000015
Schädigungswachstumsfaktor	$\alpha$	—	0,1 <sup>+</sup>

\*  $s_c = 0,001$  mm+  $\gamma = 0,8$ 

Die Kalibrierung des entwickelten Verbundmodells für unterschiedliche Interpretationen des experimentell erfassten Auszugverhaltens führt auf ungleiche Modellparameter. Das lokale Verbundverhalten in der Verbundzone unterliegt dabei verschiedenen Einflüssen und maßgebenden Entwicklungsprozessen. Während der ersten Variante das charakteristische Verbundverhalten gemäß den Verbundgesetzen aus der Literatur, vgl. Kapitel 4.1, zugrunde liegt, setzt die zweite Variante die vorliegende Hypothese zu Interlocking-Effekten und Verkeilungen in der Grenzschicht um, vgl. [WN12]. Dennoch sollen beide Varianten das experimentell erfasste Faserauszugverhalten wiedergeben.

Als Fazit dieser Auswertung kann daher bereits an dieser Stelle festgehalten werden, dass für eine eindeutige Identifizierung des Verbundverhaltens Messergebnisse zu Auszugwiderstand und Schlupf aus Einzelfaserauszugversuchen nicht ausreichen. Die Validierung des Verbundmodells im folgenden Kapitel zeigt die Auswirkungen des in den Abbildungen 6.13 und 6.14 dargestellten, unterschiedlich interpretierten Verbundverhaltens. Der Vergleich dieser beiden Varianten erlaubt Rückschlüsse auf eine korrekte Auswertung von Faserauszugversuchen. Außerdem können Hinweise auf eine optimale Konfiguration und Versuchsdurchführung im Hinblick auf eine verbesserte Aussagekraft von Faserauszugversuchen abgeleitet werden.

### 6.2.3 Validierung des Verbundmodells

Zur Validierung des Verbundmodells werden zunächst die zur Kalibrierung ausgewählten Faserauszugversuche mit den Abmessungen und Materialkennwerten nach Tabelle 6.1 modelliert und numerisch analysiert. Zur Reduzierung der Modellgröße wird der Beobachtung in Kapitel 5.2 folgend, dass der zur Kraftübertragung erforderliche Matrixradius  $r_m$  mindestens dem zehnfachen Faserradius  $r_f$  entspricht, die modellierte Matrixbreite gegenüber den Abmessungen der Versuchskörper erheblich verkleinert. Für die Versuche mit schlanken Fasern wird ein Matrixradius von  $r_m = 2$  mm gewählt, während um die Faser mit größerem Durchmesser aus München ein minimaler Matrixradius von  $r_m = 4$  mm modelliert wird. Die Matrixhöhe  $h_m$  sowie die Drahtlänge  $\ell_D$  und Fasereinbindelänge  $\ell_e$  des Berechnungsmodells entsprechen genau den Dimensionen in Tabelle 6.1, um eine Vergleichbarkeit der Längsdehnungen und Schlupfwerte des Verbundkörpers sicherzustellen. Die Abmessungen und Randbedingungen des Berechnungsmodells zur Simulation von Faserauszugversuchen sind in der folgenden Abbildung 6.15 schematisch dargestellt.



Für die folgenden Untersuchungen werden die Strukturkomponenten Faser und Matrix mit isoparametrischen Hexaeder-Elementen mit linearen Ansatzfunktionen diskretisiert, während die Verbundzone mithilfe der in Kapitel 5.2 vorgestellten Interface-Elemente einschließlich der Erweiterung für verschieblichen Verbund nach Kapitel 5.3 aufgelöst wird. Dem Isoparametrie-konzept entsprechend sind auch diese Elemente mit linearen Funktionen zur Beschreibung von Elementgeometrie und Verschiebung formuliert. Erläuterungen bezüglich der Elementarbeiten sowie zum Aufbau und zur Lösung des Gleichungssystems sind Kapitel 5 zu entnehmen.

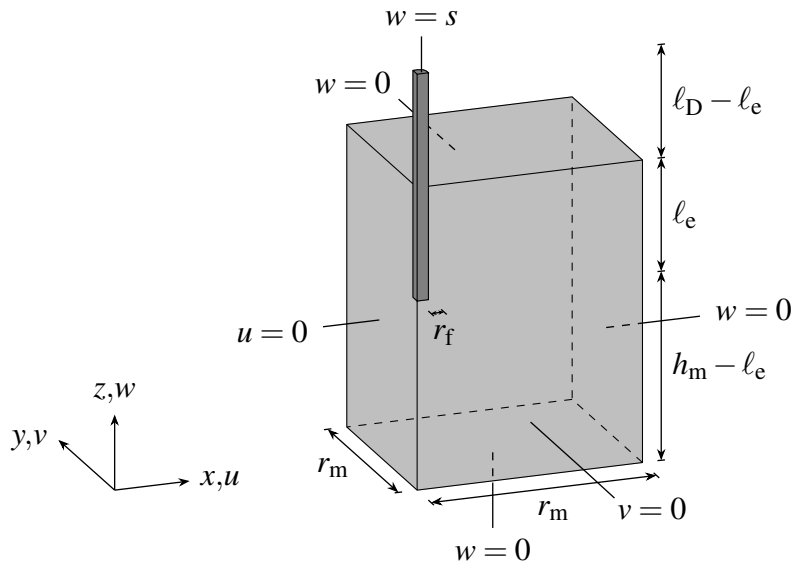


Abbildung 6.15: Schematische Darstellung des Berechnungsmodells mit Abmessungen und Randbedingungen für die Simulation von Faserauszugversuchen

Bei der numerischen Simulation von Faserauszugversuchen kommt es unmittelbar vor Beginn der Faserablösung zu sehr hohen Zugspannungen in der Matrix im Bereich des Faseraustrittsortes, die frühzeitig zu einer erheblichen Schädigung und schließlich zum Versagen der Matrix entsprechend dem verwendeten gekoppelten Plastizitäts- und Schädigungsmodell für Beton führen, vgl. Kapitel 6.1. Für die folgenden Simulationen wird daher die Schädigungsentwicklung deaktiviert. Vergleichsuntersuchungen zufolge hat diese Modellmodifikation keinen Effekt auf das Auszugverhalten. Die Auswirkungen der Singularitätsstelle am Faseraustrittsort auf den Spannungszustand werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels ausgewertet. Als Elastizitätsgrenzen des UHPCs im Zug- und Druckbereich werden

$$f_{ct,el} = 0,8 \cdot f_{ct} \quad \text{und} \quad f_{cc,el} = 0,8 \cdot f_{cc} \quad (6.23)$$

definiert, sodass auch infolge einer geringfügigen Verfestigung mit den Verfestigungsmoduln von  $H_R = 1000 \text{ N/mm}^2$  und  $H_{DP} = 6000 \text{ N/mm}^2$ , wie in Abbildung 6.4 dargestellt, die nominelle Zugfestigkeit respektive Druckfestigkeit des Materials nicht überschritten wird, vgl. Kapitel 6.1.

Für die folgende Auswertung des Auszugverhaltens werden die Zugspannungen in Faserlängsrichtung in der Mitte der Faserspitze ausgewertet und unter Berücksichtigung der Querkontraktion der Faser in Zugkräfte umgerechnet. An der Faserspitze stellt sich eine über den ebenbleibenden Querschnitt gleichverteilte Zugspannung in Faserlängsrichtung ein. Der Faserdurchmesser  $d_f(\sigma)$

verjüngt sich dabei infolge der Zugspannung in Längsrichtung zu

$$d_f(\sigma) = d_f \cdot \left( 1 - \sigma_{zz,f} \cdot \frac{v_s}{E_s} \right), \quad (6.24)$$

sodass die Querschnittsfläche der Faser  $A_f(\sigma)$  mit

$$A_f(\sigma) = \frac{\pi \cdot (d_f(\sigma))^2}{4} \quad (6.25)$$

ermittelt werden kann. Die Zugkraft an der Faserspitze ergibt sich als Integral der gleichverteilten Zugspannungen über die Querschnittsfläche zu

$$P = \sigma_{zz,f} \cdot A_f(\sigma) = \sigma_{zz,f} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left( d_f \cdot \left( 1 - \sigma_{zz,f} \cdot \frac{v_s}{E_s} \right) \right)^2. \quad (6.26)$$

Um eine Vergleichbarkeit zwischen den unterschiedlichen Versuchskonfigurationen herzustellen, wird für die folgende Darstellung der Ergebnisse in den Abbildungen 6.16 und 6.17 die Zugkraft an der Faserspitze auf den theoretischen Maximalwert infolge einer konstanten Verbundspannungsverteilung in Höhe der initialen Verbundfestigkeit  $f_r$

$$P_{0,i} = f_r \cdot \ell_{e,i} \cdot u_f \quad (6.27)$$

mit  $i \in [0; 2]$  normiert. Dabei werden für die Normierung der Versuchsdaten die korrigierten Fasereinbindelängen nach Tabelle 6.2 verwendet.

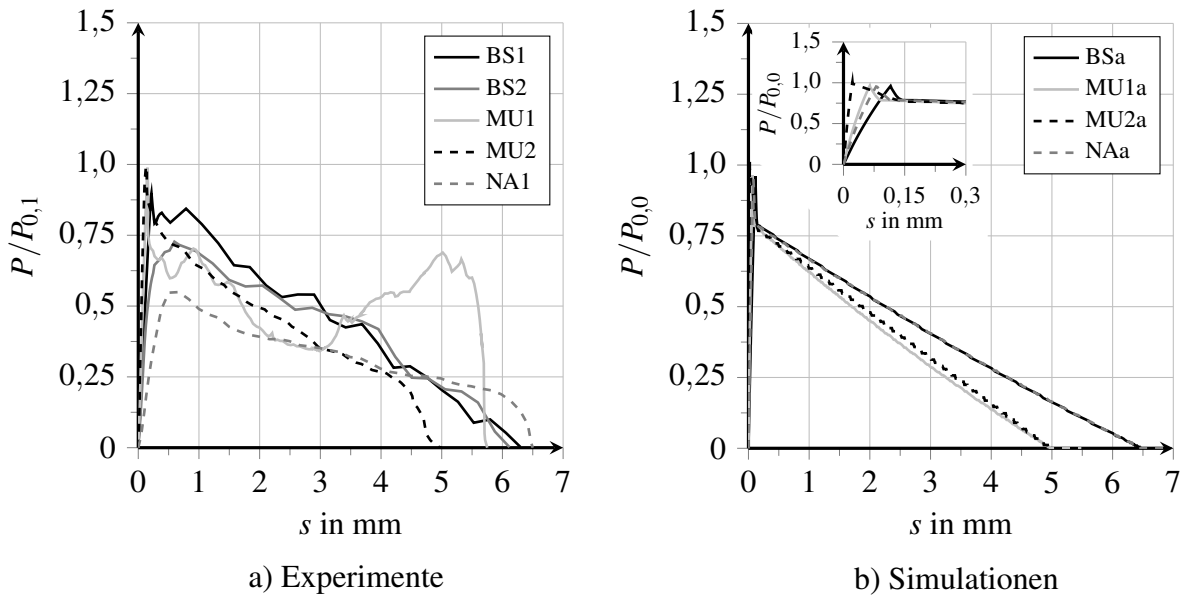


Abbildung 6.16: Experimentell und numerisch ermittelter Auszugswiderstand über Schlupf mit Modellparametern gemäß Tabelle 6.3

In der vorstehenden Abbildung 6.16 sind die Ergebnisse, d. h. die Verläufe des Auszugswiderstandes über den Schlupf an der Faserspitze, einerseits der Experimente und andererseits der numerischen Simulationen mit den Modellparametern der ersten Kalibrierungsvariante gemäß

Tabelle 6.3 gegenübergestellt. Darin erfolgt die Normierung der Versuchsergebnisse in Abbildung 6.16 a) gemäß Gleichung (6.27) mithilfe der durch Extrapolation korrigierten Fasereinbindelängen  $\ell_{e,1}$  nach Tabelle 6.2. In Analogie dazu sind die Simulationsergebnisse in Abbildung 6.16 b) normiert auf den theoretischen, maximalen Auszugswiderstand  $P_{0,0}$  nach Gleichung (6.27) dargestellt.

Die numerischen Simulationen der untersuchten Faserauszugversuche in Abbildung 6.16 b) ergeben ein näherungsweise übereinstimmendes Auszugverhalten, das die charakteristischen Phasen nach Kapitel 3.3 aufweist. Dabei ist nur ein geringfügig nichtlinearer Verlauf des abnehmenden Auszugswiderstandes in der Faserauszugphase zu erkennen. Nahezu ideal linear verläuft der Auszugswiderstand bei Variante MU2a in Abbildung 6.16 b), die sich vor allem durch den größeren Faserdurchmesser von  $d_f = 0,48 \text{ mm}$  von den übrigen Konfigurationen unterscheidet. Die vergrößerte Darstellung der ersten beiden Auszugphasen in Abbildung 6.16 b) zeigt, dass der maximale Auszugswiderstand bei unterschiedlichen Schlupfbeträgen erreicht wird und der anschließende Lastabfall infolge des abweichenden Schädigungswachstums nicht mit demselben Schlupfzuwachs einhergeht, vgl. Kapitel 3.3. Dabei ist zu berücksichtigen, dass der hier dargestellte Absolutwert des Schlupfes  $s$  an der Faserspitze auch die elastischen Dehnungen der ungleich langen Komponenten beinhaltet. Weiterhin ist zu erkennen, dass die Maximalwerte des Auszugswiderstandes der verschiedenen Versuchskonfigurationen in den numerischen Simulationen unterschiedlich nah an das jeweilige theoretische Maximum  $P_{0,0}$  nach Gleichung (6.27) herankommen. Als Ursache für diese Abweichung kommt neben der abweichenden Schädigungsentwicklung auch eine abweichende Kontaktpressung infrage, die die Verteilung der Verbundschubspannungen über die Verbundlänge beeinflusst, vgl. Kapitel 4.2. Eine detaillierte Auswertung der Entwicklung von Verbundzonenschädigung und Querdruck erfolgt im folgenden Kapitel.

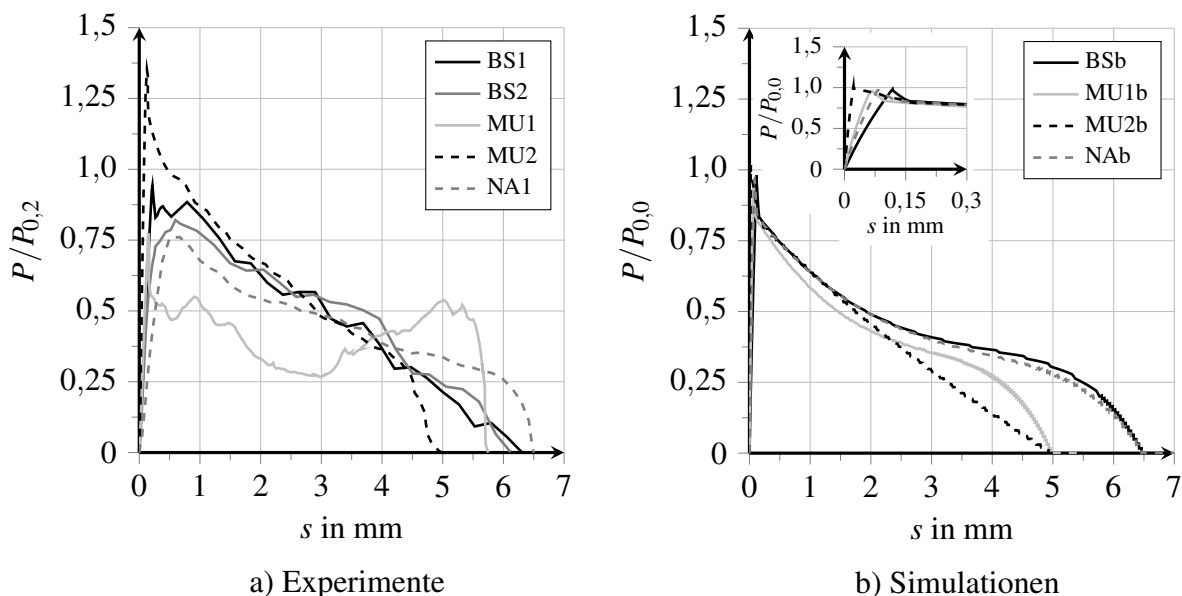


Abbildung 6.17: Experimentell und numerisch ermittelter Auszugswiderstand über Schlupf mit Modellparametern gemäß Tabelle 6.4

Ergänzend dazu sind in Abbildung 6.17 die Versuchsdaten und Ergebnisse der numerischen Simulationen mit den Modellparametern der zweiten Kalibrierungsvariante gemäß Tabelle

6.4 gegenübergestellt. Die Normierung der Versuchsergebnisse in Abbildung 6.17 a) nach Gleichung (6.27) bezieht sich auf die ermittelten Fasereinbindelängen  $\ell_{e,2}$  nach Tabelle 6.2. Die Simulationsergebnisse in Abbildung 6.17 b) sind entsprechend auf die maximale Auszugskraft  $P_{0,0}$  normiert dargestellt.

Während die Ergebnisse der Variante MU2b mit dem Faserdurchmesser  $d_f = 0,48 \text{ mm}$  ein nur geringfügig nichtlineares Auszugverhalten in der Faserauszugphase aufweist, sind die übrigen Verläufe des Auszugwiderstandes über den Schlupf in Abbildung 6.17 b) erkennbar nichtlinear bei fortgeschrittenem Auszug der Faser aus der Matrix. Das Auszugverhalten gemäß Abbildung 6.17 a) mit dem beschleunigten Lastabfall zum Ende des Faserauszuges ist daher mit der gewählten Modellierung nicht für alle Konfigurationen reproduzierbar. Auch die numerischen Simulationen zu dieser Kalibrierungsvariante zeigen einen signifikanten Einfluss der Schädigungsentwicklung, welche im folgenden Kapitel detailliert dargestellt ist, auf die Wirksamkeit der Verfestigung.

Grundsätzlich ist das entwickelte Verbundmodell in der Lage, das Auszugverhalten von Einzelfasern aus UHPC zu beschreiben. Der Vergleich der in den Abbildungen 6.16 b) und 6.17 b) dargestellten Simulationsergebnisse lässt bereits erste Rückschlüsse auf die Bedeutung der in Kapitel 3.3 zusammengefassten Einflüsse auf das Auszugverhalten zu. Im folgenden Kapitel wird die Entwicklung der Verbundwirkung im Hinblick auf die geometrischen und materialspezifischen Einflussparameter genauer analysiert. Zunächst wird das Auszugverhalten zur Modellvalidierung und Überprüfung der im Rahmen der Kalibrierung getroffenen Annahmen hinsichtlich der Auswertung der Verbundwirkung für die Modellkonfiguration BSa analysiert. Dazu werden der Zustand des Faser-Matrix-Verbundes und die Entwicklung des Verbundwiderstandes über die charakteristischen Phasen des Auszugverhaltens gemäß Kapitel 3.3 untersucht, die in der folgenden Abbildung 6.18 dargestellt sind.

Im Initialzustand herrscht in Phase I über die gesamte Verbundfläche des Faser-Matrix-Verbundes starrer Verbund vor. Der Faserendschlupf  $s_0$  verschwindet näherungsweise mit  $s_0 = 4,86 \text{ nm}$ , während am Faseraustrittsort allmählich der Grenzwert des elastischen Schlupfes  $s_c$  erreicht wird. Die folgende Abbildung 6.18 a) zeigt die Konzentration der Schubspannungen  $\sigma_{xz}$  im Bereich des Faseraustrittsortes.

In der zweiten Phase des Auszugverhaltens erfolgt mit der fortschreitenden Kontaktzonenrissbildung der Übergang von starrem zu verschieblichen Verbund entlang der eingebetteten Faser. Die Ausweitung der Schubspannungen entlang der Verbundlänge in Abbildung 6.18 b) zeigt den Fortschritt der Ablösung der Faser von der Matrix an. In diesem partiellen Ablösungszustand des Faser-Matrix-Verbundes konzentriert sich die Kraftübertragung auf den abgelösten Bereich, in dem durch das Debonding zunächst ein hoher lokaler Verbundwiderstand generiert wird. Am eingebetteten Faserende tritt nur eine Verschiebung von  $s_0 = 0,368 \text{ }\mu\text{m}$  auf.

Mit zunehmender Relativverschiebung und Verbundzonenschädigung erfolgt die Degradation der Verbundkapazität. In Abhängigkeit des vorherrschenden Querdruckes weist der lokale Verbundwiderstand dabei einen mehr oder weniger hohen Anteil aus Gleitreibung auf. Mit dem Auszug der Faser aus der Matrix wird der Bereich der Kraftübertragung zunehmend reduziert. In Abbildung 6.18 c) sind die Schubspannungen im verformten Zustand des Faser-Matrix-Verbundes bei einem Faserendschlupf von  $s_0 = 2 \text{ mm}$  dargestellt.

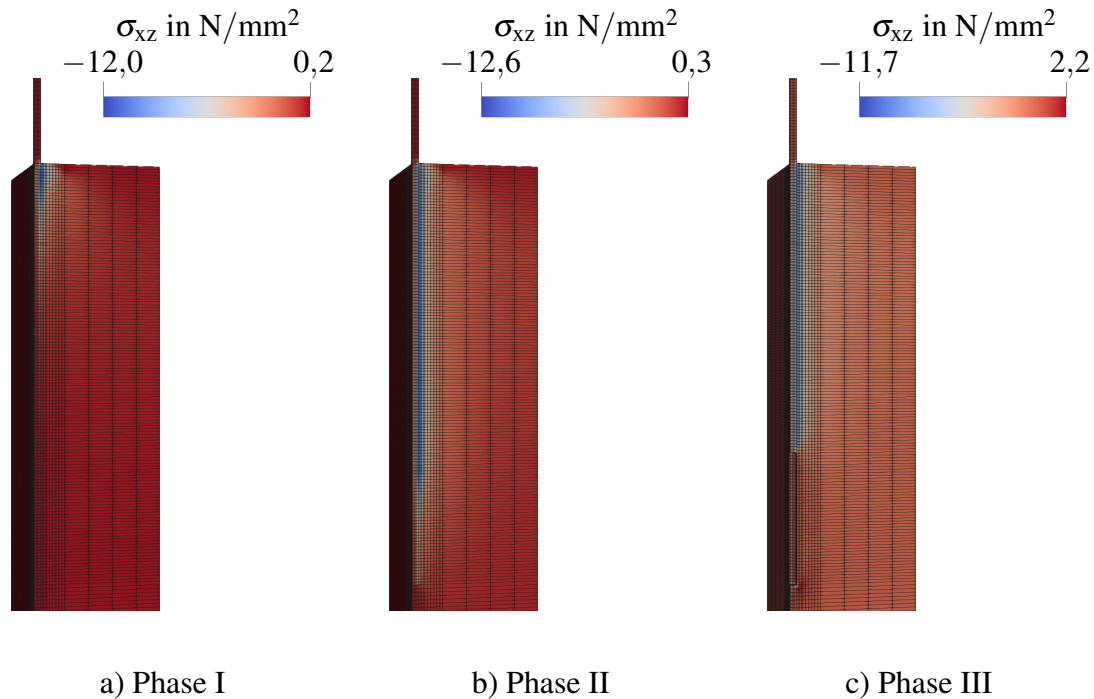


Abbildung 6.18: Darstellungen der Schubspannungen für die verschiedenen Auszugphasen

Die Bestimmung des Faserendschlupfes nach Gleichung (6.19) beruht auf der Annahme, dass die Dehnungen der Matrix entlang und unterhalb der Verbundzone vernachlässigbar gering sind, sodass die Verschiebung der Faser näherungsweise der Relativverschiebung in der Verbundzone entspricht. Im linken Diagramm in der folgenden Abbildung 6.19 ist die Längsverschiebung der Matrix in direkter Umgebung der Grenzschicht für die verschiedenen Auszugphasen gemäß Abbildung 6.18 über die bezogene Verbundlänge  $\zeta$  dargestellt. Dabei wird für die Faserauszugsphase die Verbundlänge nach Gleichung (6.17) bestimmt, d. h. der Faserkanal unterhalb des um  $s_0 = 2 \text{ mm}$  verschobenen Faserendes ist nicht Teil der dargestellten Verbundlänge. Außerdem zeigt Abbildung 6.19 rechts die Dehnungen  $\varepsilon_{xx}$ , die in dieser Ansicht der Symmetrieschnittfläche den Querdehnungen der Faser in Richtung des äußeren Matrixrandes entsprechen, in einer einhundertfach überhöhten Darstellung der Verformungsfigur in Phase I.

In beiden Darstellungen in Abbildung 6.19 ist die Ausbildung eines Meniskus im Bereich des Faseraustrittsortes zu erkennen, wo die Längsverschiebung der Matrix stark zunimmt. Darüber hinaus zeigen die Verschiebungsverläufe den Einfluss der Ablösung in Phase II, mit der eine lokale Vergrößerung der Matrixverschiebung einhergeht. Insgesamt weisen die Verläufe aber auf eine untergeordnete Bedeutung der Matrixdehnung für die Ermittlung des Schlupfes und der Relativverschiebung in der Grenzschicht hin. Die Darstellung der Querdehnungen  $\varepsilon_{xx}$  in Abbildung 6.19 rechts im Bereich des Faseraustrittsortes zeigt die lokale Konzentration von Querspannungen infolge der Matrixverformung. Dieser durch die Singularitätswirkung verstärkte Spannungszustand führt, wie eingangs erwähnt, bei der Initiierung der Kontaktzonenrissbildung zu Beginn des Faserauszuges zu einer intensiven Zugschädigung innerhalb des gekoppelten Plastizitäts- und Schädigungsmodells für Beton, vgl. Kapitel 6.1.

Infolge der Querspannungen wird auch eine Ringzugspannung in geringer Entfernung um den Faseraustrittsort generiert, die ebenfalls bei der beginnenden Auflösung des starren Verbundes eine kritische Größenordnung erreicht. Die Singularität am Faseraustrittsort hat auch

einen Einfluss auf die Verbundwirkung, wie die folgende Auswertung zeigt. Im Bezug auf die experimentellen Untersuchungen ist die in Abbildung 6.19 gezeigte Verformung plausibel.

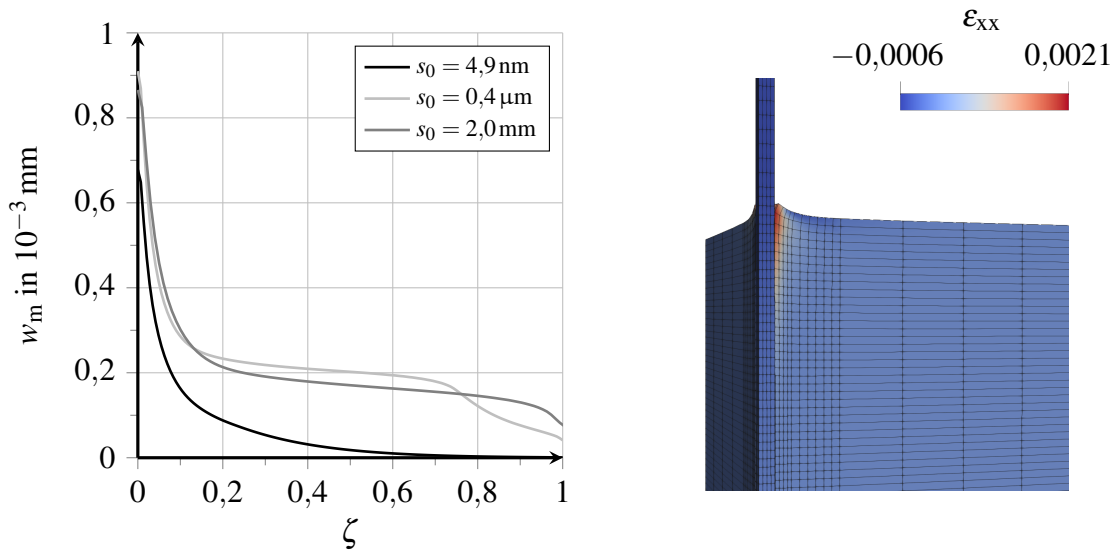


Abbildung 6.19: Verschiebung der Matrix im Abstand  $r = 5/8 \cdot d_f$  von der Faserachse über die Verbundlänge und Darstellung der Querdehnungen im Faser-Matrix-Verbund

In der folgenden Abbildung 6.20 sind links die Verläufe der Zugspannung in Fasermitte über die bezogene Verbundlänge analog zu den in Abbildung 6.18 dargestellten Verschiebungszuständen dargestellt.

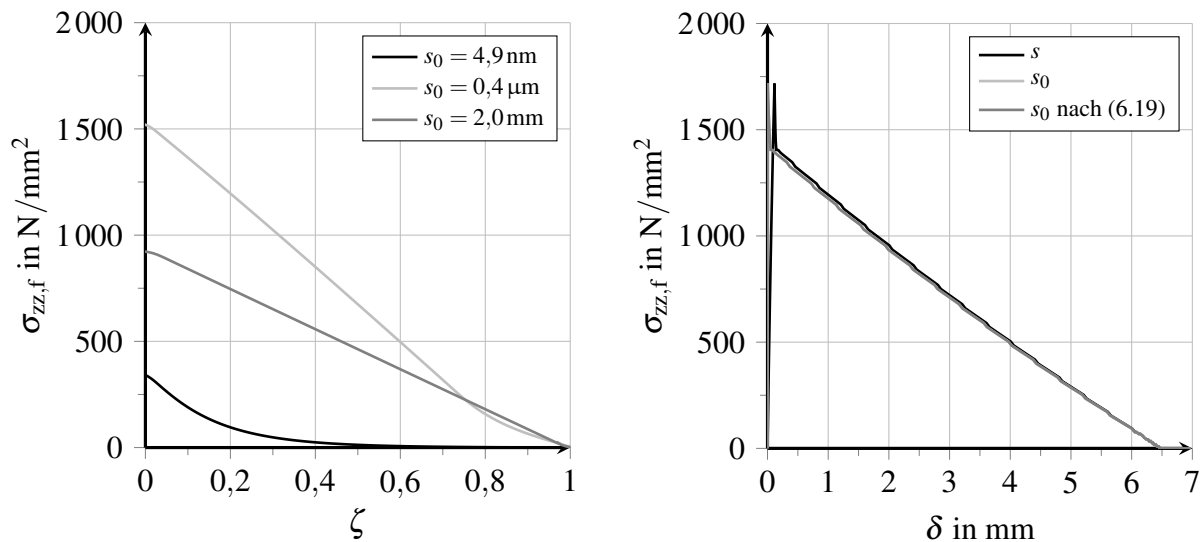


Abbildung 6.20: Längszugspannungen in Fasermitte über die Verbundlänge für verschiedene Auszugsphasen und über den Schlupf an Faserspitze und Faserende

Die überschlägige Ermittlung des Faserendschlupfes nach Gleichung (6.19) berücksichtigt die Annahme eines linearen Spannungs- und Dehnungsverlaufes in der Faser entlang des Verbundbereiches. Während die Annahme einer linearen Spannungs- und Dehnungsverteilung in der Faser

für den abgelösten Bereich der Verbundzone, d. h. für die gesamte verbleibende Verbundlänge bei einem Faserendschlupf von  $s_0 = 2\text{ mm}$  und für den Bereich nahe des Faseraustrittsortes bei  $s_0 = 0,4\text{ }\mu\text{m}$ , gerechtfertigt ist, verläuft die Zugspannung in der quasi-starr mit der Matrix verbundenen Faser nichtlinear, wie Voruntersuchungen in Kapitel 5.2 ebenfalls zeigen.

Außerdem ist rechts in Abbildung 6.20 die Faserzugspannung an der Lasteinleitungsstelle über den Schlupf  $s$  an der Faserspitze sowie  $s_0$  am Faserende dargestellt. Während die Verläufe des Schlupfes an der Faserspitze und am Faserende erwartungsgemäß voneinander abweichen, entspricht die überschlägige Ermittlung des Faserendschlupfes  $s_0$  nach Gleichung (6.19) nahezu exakt der numerisch ermittelten Verschiebung des Faserendes. Diese Übereinstimmung bestätigt die ausreichend gute Näherung des tatsächlichen Verlaufes der Faserzugspannungen über die Faserlänge im Rahmen der Kalibrierung. Für die folgenden Darstellungen der Entwicklung der Verbundwirkung über den Verlauf des Faserauszuges wird daher der numerisch ermittelte Faserendschlupf als Bezugsgröße gewählt.

Neben der veränderlichen Verbundlänge, die mithilfe des Faserendschlupfes näherungsweise bestimmt werden kann, sind zur Auswertung des experimentell ermittelten Auszugverhaltens Informationen über die Verteilung der Verbundspannungen über die Verbundlänge erforderlich. Da die Relativverschiebung in der Grenzschicht im Rahmen eines Faserauszuges vom eingebetteten Faserende in Richtung des Faseraustrittsortes zunimmt, ist die Schlupfdifferenz eine geeignete Hilfsgröße zur Einschätzung des Verbundspannungsverlaufes über die Verbundlänge in Verbindung mit der Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung in Abbildung 6.13.

In der folgenden Abbildung 6.21 ist die Differenz zwischen der Relativverschiebung am Faseraustrittsort und am eingebetteten Faserende, bezeichnet als Schlupfdifferenz  $\Delta\delta_t$ , für die verschiedenen Auszugphasen über die bezogene Verbundlänge und über den Faserendschlupf dargestellt. Obwohl der Faserauszug überwiegend von einer nichtlinearen Verteilung der Relativverschiebungen entlang der Verbundlänge geprägt ist, ist die absolute Differenz der Verschiebungen mit weniger als  $\Delta\delta_t = 0,03\text{ mm}$  vergleichsweise gering.

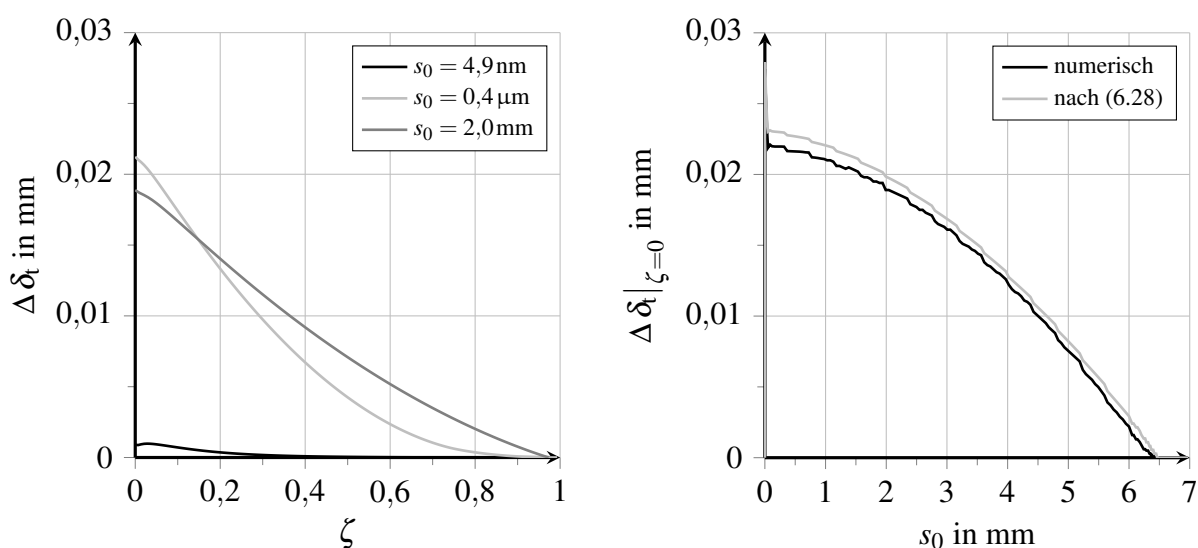


Abbildung 6.21: Schlupfdifferenz über die Verbundlänge für verschiedene Auszugphasen und an der Stelle des Faseraustrittsortes über den Faserendschlupf

Die Änderung der übertragbaren Verbundspannungen über eine kleine Schlupfdifferenz ist für die gewählte Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung in Abbildung 6.13 nur in den Phasen des starren Verbundes und des Debondings signifikant, vgl. Kapitel 3.1. Insbesondere bei fortgeschrittenem Faserauszug mit verschieblichem Verbund über die verbleibende Verbundlänge ergibt sich bei der geringen Schlupfdifferenz eine nahezu gleichmäßig verteilte Verbundschubspannung, vgl. Abbildung 6.22.

Aufbauend auf der überschlägigen Ermittlung des Faserendschlupfes ermöglicht die Annahme eines vereinfachenden Verlaufes der Faserlängsdehnung  $\varepsilon_{zz,f}$  nach Gleichung (6.16) außerhalb des Verbundbereiches die näherungsweise Bestimmung der Schlupfdifferenz. Die akkumulierte Verschiebung der Faser lässt sich nach Integration mit

$$\Delta \delta_t = \varepsilon_{zz,f} \cdot \frac{1}{2} (\ell_e + s_0) \quad (6.28)$$

abschätzen.

Mit dieser Approximation der Schlupfdifferenz kann direkt aus den Ergebnissen eines Faserauszugversuches der Schlupf am Faseraustrittsort ermittelt werden. Die Auswertung der lokalen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung für den Schlupf am Faseraustrittsort und den Faserendschlupf ermöglicht dann eine Einschätzung der Verbundspannungsverteilung, da direkt der Ablösungszustand sowie mögliche Extremwerte der Verbundschubspannung in der Grenzschicht bekannt sind.

In Abbildung 6.21 rechts sind die numerisch ermittelten Schlupfdifferenzen über den Faserauszug den mithilfe Gleichung (6.28) überschlägig bestimmten Beträgen gegenübergestellt. Die geringfügige gleichbleibende Abweichung von etwa 0,001 mm ist dabei auf die Ermittlung der Relativverschiebung mithilfe der Knotenzuordnung und der tolerierten Abweichung von  $s_c = 0,001$  mm zurückzuführen. Der nahezu übereinstimmende Verlauf bestätigt die Korrelation zwischen den Relativverschiebungen in der Verbundzone und der Faserverschiebung. Insgesamt liefert die näherungsweise Ermittlung des Faserendschlupfes und der Schlupfdifferenz für die Modellkonfiguration BSa nahezu mit der Simulation übereinstimmende Ergebnisse.

Die folgende Abbildung 6.22 zeigt links die Verteilungen der Verbundschubspannungen über die bezogene veränderliche Verbundlänge, ausgewertet für die verschiedenen Zustände des Faser-Matrix-Verbundes entsprechend Abbildung 6.18. Die nichtlineare Verbundspannungsverteilung vor der Ablösung der Faser von der Matrix weist im Bereich des Faseraustrittsortes Einflüsse aus der Verformung der Matrix und der Singularitätsstelle auf, vgl. Abbildung 6.19. Nach der partiellen Ablösung der Kontaktflächen voneinander in Auszugphase II gemäß Abbildung 6.18 ist im abgelösten Bereich ein hoher und nahezu konstant verlaufender Verbundwiderstand vorherrschend, während im Bereich des Faserendes analog zu Phase I ein nichtlinearer Spannungsverlauf ausgebildet ist.

Die Verteilung der Verbundspannungen im abgelösten Bereich ist von der Änderung der Relativverschiebungen und der lokalen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung mit der Degradation der Verbundkapazität und der Entwicklung von Querdruck abhängig, vgl. Kapitel 3.4. Im Vergleich zur schematischen Darstellung des Verbundspannungsverlaufes in Abbildung 3.11 ist in den numerischen Ergebnissen ein deutlicher Knick im Verlauf der Verbundspannungen zu erkennen. Dieser ist auf den Toleranzwert  $s_c$  innerhalb des Kontaktalgorithmus zurückzuführen, mit dessen Überschreitung eine schlagartige Änderung der Verbundwirkung einhergeht, vgl.



Kapitel 5.3. Im vollständig verschieblichen Faser-Matrix-Verbund bildet sich dann eine nahezu konstante Verteilung der Verbundschubspannungen über die Verbundlänge aus, wie hinsichtlich der geringfügigen abnehmenden Schlupfdifferenz zu erwarten, vgl. Abbildung 6.21.

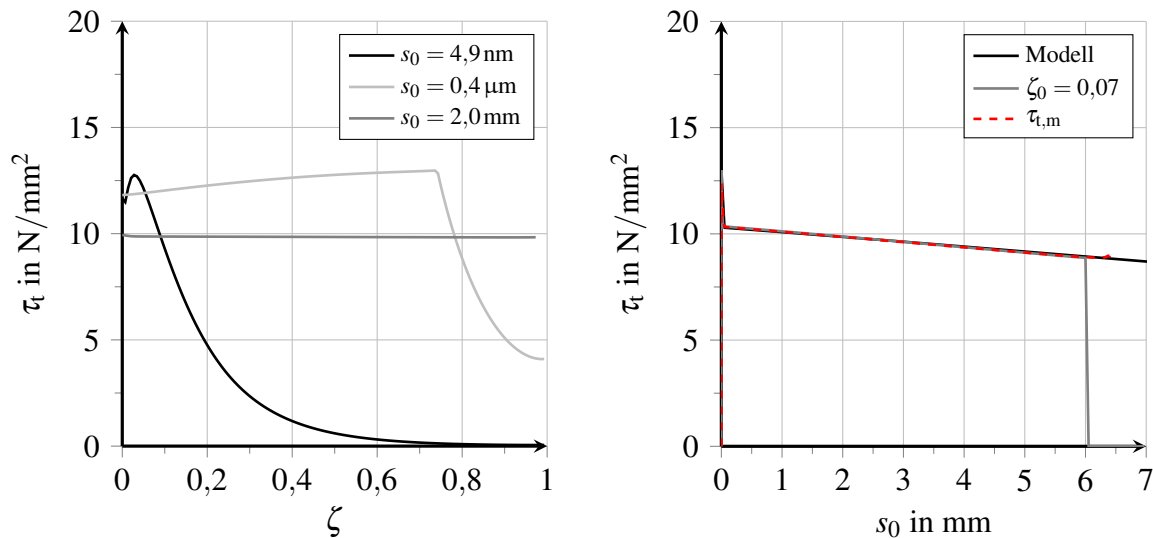


Abbildung 6.22: Verbundschubspannungen über die Verbundlänge für verschiedene Auszugphasen und Entwicklung im Bereich des Faseraustrittsortes über den Auszug

Dieser Beobachtung entsprechend weicht die rechts in Abbildung 6.22 dargestellte mittlere Verbundspannung  $\tau_{t,m}$  über den Faserendschlupf in der Faserauszugsphase kaum von der lokalen Verbundspannung im Bereich des Faseraustrittsortes ab. Diese wird in einem Abstand zum Rand der Verbundzone an der Stelle  $\zeta_0 = 0,07$  im Bezug auf die initiale Verbundlänge ausgewertet, um den Einfluss der Störung durch die Matrixverformung und die Singularitätsstelle zu minimieren. Lediglich während des Ablösevorganges in den Auszugsphasen I und II kann die Mittelwertkurve die lokal unterschiedliche Verbundwirkung mit ihrem nichtlinearen Verlauf nicht abbilden. Das zeigt auch die Standardabweichung, die von Werten in der Größenordnung von  $5,0 \text{ N/mm}^2$  zu Beginn des Auszuges auf Beträge unterhalb von  $0,1 \text{ N/mm}^2$  zurückgeht.

Darüber hinaus verläuft die lokale Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung gemäß der Kalibrierung des Verbundmodells in Abbildung 6.13, die in dieser Darstellung in schwarz hinterlegt ist, im Faserauszugsbereich nahezu identisch. Das Vorgehen zur Auswertung von Faserauszugsversuchen, das im Rahmen der Kalibrierung dargelegt ist, kann zusammenfassend durch diese Ergebnisse für die Faserauszugsphase bestätigt werden. Eine detaillierte Auswertung der Verbundwirkung im starren Faser-Matrix-Verbund ist hingegen nicht mithilfe einer überschlägigen Ermittlung der Verbundlänge und gemittelten Verbundspannungen möglich.

Die Entwicklung der Verbundschubspannung über den Faserendschlupf in Abbildung 6.22 rechts deutet außerdem auf einen geringen Einfluss von Querdruckspannungen in dieser Modellkonfiguration hin. In der folgenden Abbildung 6.23 sind die Relativverschiebungen in Normalenrichtung sowie die Verbundnormalspannung in der Verbundzone dargestellt. Neben den Verläufen der Relativverschiebung  $\delta_n$  über die bezogene Verbundlänge für die Auszugsphasen II und III gemäß Abbildung 6.18 sind in Abbildung 6.23 links auch die Verläufe der inelastischen Anteile dargestellt.

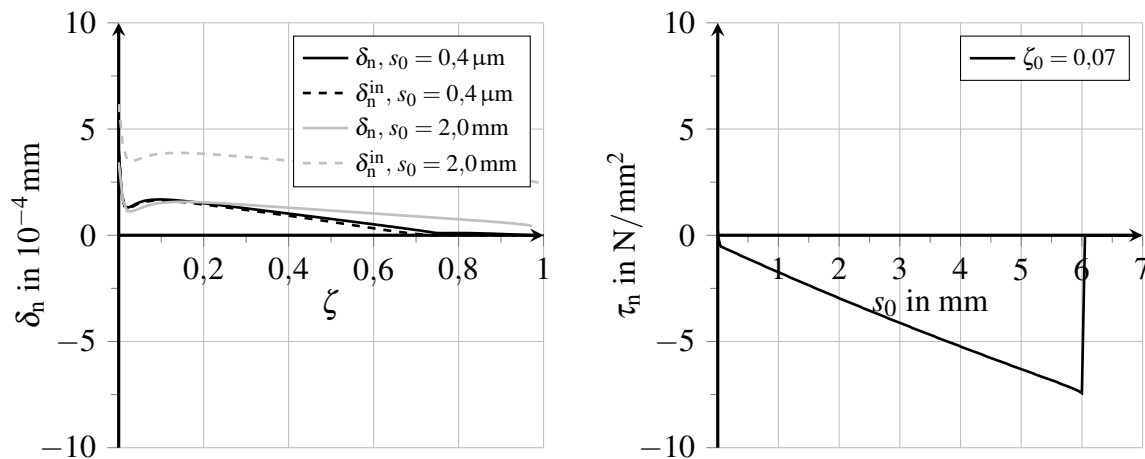


Abbildung 6.23: Normale Relativverschiebungen über Verbundlänge und Entwicklung der Verbundnormalspannungen im Bereich des Faseraustrittsortes über den Auszug

Während zu Beginn des Faserauszuges nur geringe, überwiegend positive Relativverschiebungen auf eine Querkzugbeanspruchung in der Verbundzone hinweisen, erfährt die Verbundzone mit fortschreitendem Faserauszug eine inelastische Aufweitung infolge von Dilatanz, vgl. Kapitel 3.2. Die Diskrepanz zwischen inelastischer und totaler Relativverschiebung zeigt, dass diese Aufweitung eine elastische Überdrückung der Kontaktzone und damit eine zunehmende Kontaktpressung im abgelösten Verbundbereich erzeugt. Außerdem zu erkennen ist die Auswirkung der Matrixverformung auf die Verbundzone im Bereich des Faseraustrittsortes, vgl. Abbildung 6.19.

Der Spannungszustand in der Verbundzone verändert sich signifikant mit der Ablösung der Faser von der Matrix, vgl. Abbildungen 6.22 und 6.23. Mit einsetzender Beanspruchung generieren zunächst die Verbundmechanismen Adhäsion und Mikroverzahnung einen hohen Verbundwiderstand, der eine über die Verbundlänge nichtlineare Kraftübertragung ermöglicht. Bis zum maximalen Auszugswiderstand nimmt die Querkontraktion der Faser und damit die Querkzugspannung in der Verbundzone zu. Mit der Überschreitung der initialen Verbundfestigkeit aus der kombinierten parallelen und senkrechten Verbundspannung im Bereich des Faseraustrittsortes wird die Kontaktzonenrissbildung initiiert. Der Kontaktzonenriss zwischen Faser und Matrix wächst bei zunehmender Beanspruchbarkeit in Richtung des eingebetteten Faserendes und führt zu einer vollflächigen Aktivierung des maximalen Verbundwiderstandes.

Im Zuge der Rissbildung wird auch der umliegende Beton aufgrund seiner geringen Zugfestigkeit geringfügig geschädigt. Zeitgleich ermöglicht das Debonding eine inelastische Aufweitung der Grenzschicht etwa durch die Ablösung von Betonpartikeln im Faserkanal. Der fortschreitende Faserauszug schädigt die Verbundzone durch Abrasion und Vermahlung der gelösten Partikel und führt so zu einem abnehmenden Verbundwiderstand. Gleichzeitig verringert sich die Verbundlänge mit zunehmendem Faserendschlupf, sodass der Auszugswiderstand als Integral des lokalen Verbundwiderstandes über die verbleibende Verbundlänge kontinuierlich reduziert wird. Die Entspannung der Faser führt dabei zu einer verringerten Querkontraktion, d. h. zu einer Überdrückung der Verbundzone gegen die anschließende Betonmatrix. In der Folge werden die anfänglichen Querkzugspannungen durch eine stetig zunehmende Kontaktpressung ersetzt. Durch die Aktivierung des Reibverbundes verändert sich auch die Tragfähigkeit der Verbundzone, da mit der Begrenzung des Spannungszustandes im Querdrukgebiet eine zunehmende, rechnerische Verbundfestigkeit generiert wird, vgl. Kapitel 4.2 und 4.3.

Die Entwicklung der Verbundnormalspannung im Bereich des Faseraustrittsortes über den Faserendschlupf, dargestellt in Abbildung 6.23 rechts, verläuft nach der Ablösung zwischen Faser und Matrix nahezu linear im negativen Bereich bis zum lokalen Kontaktverlust. Dabei erreicht sie eine Größenordnung, die eine signifikante Gleitreibung induziert und somit den lokalen Verbundwiderstand zunehmend verstärkt. Der querdruckinduzierte Reibverbund wirkt der Degradation der Verbundkapazität durch die Verbundzonenschädigung hinsichtlich der Verbundwirkung entgegen. Dennoch nimmt gleichermaßen die irreversible Schädigung der Verbundzone zu, wie die folgende Abbildung 6.24 zeigt. Darin sind der Verlauf der Verbundzonenschädigung über die Verbundlänge bei partieller Ablösung und die Entwicklung der Schädigung im Bereich des Faseraustrittsortes über den Faserendschlupf dargestellt. Die nichtlineare Verteilung der Schädigung entspricht dabei der Verteilung der inelastischen Relativverschiebungen  $\delta_t^{\text{in}}$ , die gemäß Kapitel 4.2 alleine zum Schädigungswachstum beiträgt. Durch das abnehmende Schädigungsentwicklungspotenzial ist bei weiteren Relativverschiebungen z. B. bei längeren Fasern oder eine abwechselnd gerichtete Verschiebung infolge einer zyklischen Beanspruchung ein weiter abflachender Verlauf der Verbundzonenschädigung über den Schlupf zu erwarten, vgl. Abbildungen 4.20 und 4.33. Der geschädigte Zustand der Verbundzone limitiert maßgeblich ihre Tragfähigkeit bei weiteren Beanspruchungen. Die Auswirkungen einer Entlastung wie etwa im Rahmen einer zyklischen Ermüdungsbeanspruchung sind im folgenden Kapitel dargelegt.

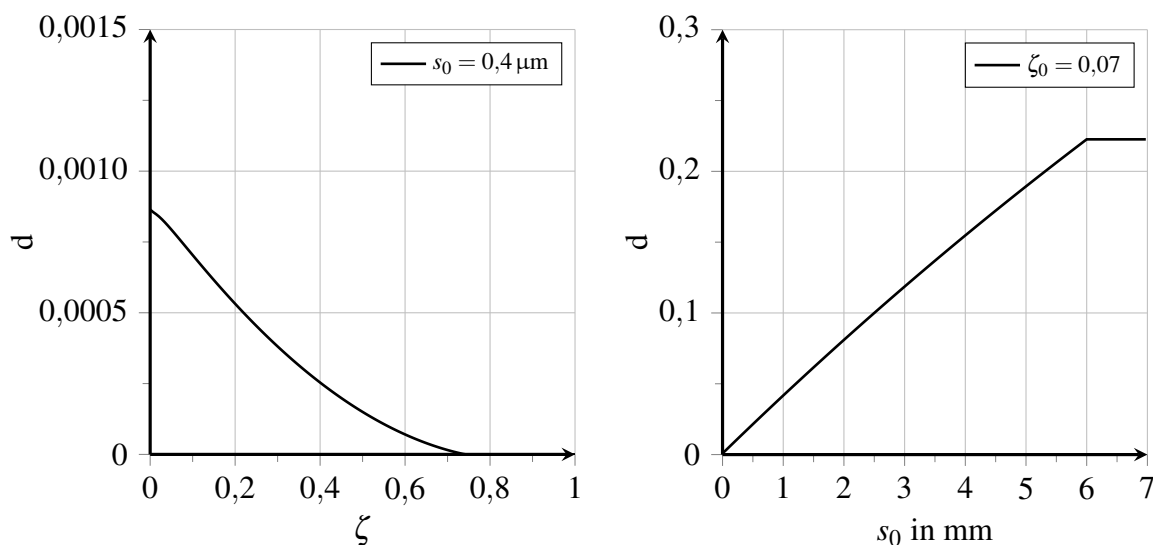


Abbildung 6.24: Verbundzonenschädigung über die Verbundlänge bei partieller Ablösung und Entwicklung im Bereich des Faseraustrittsortes über den Auszug

Die Auswertung des Auszugverhaltens hinsichtlich der Verbundwirkung und ihrer Entwicklung über den kontinuierlichen Faserauszug belegt die Eignung des entwickelten Verbundmodells für numerische Analysen des Faser-Matrix-Verbundes. Das in Kapitel 3.3 herausgearbeitete, charakteristische Auszugverhalten mit der vom Faseraustrittsort in Richtung des Faserendes fortschreitenden Kontaktzonenrissbildung ist detailliert nachvollziehbar. Mit der gewählten Kalibrierung des Verbundmodells anhand der mittleren Verbundschubspannung kann die Verbundwirkung im starren Verbund vor Beginn der Ablösung der Faser von der Matrix nur näherungsweise charakterisiert werden. Denn weder die elastische Relativverschiebung bis zur Kontaktzonenrissinitiation noch die Verbundsteifigkeit im starren Verbund oder die maximale Verbundfestigkeit können aus den Versuchsdaten identifiziert werden. Dass dennoch die mittlere

Verbundspannung zur Kalibrierung der Modellparameter herangezogen werden kann, liegt darin begründet, dass der maximale Auszugswiderstand erst zeitgleich mit der vollendeten Ablösung der Kontaktflächen voneinander erreicht wird. Den Abbildungen 6.22 und 6.21 ist dabei zu entnehmen, dass aufgrund der geringen Schlupfdifferenz eine gleichmäßige Verbundwirkung über die Verbundlänge ausgebildet werden kann, die erst im Laufe des Herausziehens der Faser infolge der Verbundzonenschädigung allmählich verringert wird. Die Kalibrierung des Verbundmodells für die Faserauszugphase anhand der mittleren Verbundschubspannung liefert dabei insgesamt plausible Resultate. Die Auswertung der Verbundwirkung für die übrigen simulierten Modellkonfigurationen, deren Ergebnisse in den Abbildungen 6.16 b) und 6.17 b) dargestellt sind, erfolgt gemeinsam mit der Untersuchung weiterer Einflussfaktoren im folgenden Kapitel.

#### 6.2.4 Einflüsse auf das Auszugverhalten

Das entwickelte Verbundmodell dient zur Beschreibung des Auszugverhaltens von geraden Mikrostahlfasern mit glatter Oberfläche, die weggeregelt aus einer feinkörnigen UHPC-Matrix herausgezogen werden. Die numerische Simulation ausgewählter Versuchskonfigurationen nach Tabelle 6.1 mit verschiedenen Modellparametern, zusammengefasst in den Tabellen 6.3 und 6.4, weisen auf unterschiedliche Ausprägungen und Verteilungen des lokalen Verbundwiderstandes über die Verbundlänge hin. Mithilfe des entwickelten Verbundmodells können die Auswirkungen der in den Konfigurationen variierten Material- und Geometrieparameter erfasst und untersucht werden. Im Bezug auf die vorliegenden Versuchsergebnisse werden in den Untersuchungen unter anderem die Fasereinbindelänge, der Faserdurchmesser, der Elastizitätsmodul des Betons und die Betonzugfestigkeit variiert, vgl. Abbildungen 6.16 und 6.17. Während die Betondruckfestigkeit und die Zugfestigkeit der Faser das Auszugverhalten nicht beeinflussen, kann die Auswirkung der unterschiedlichen Probekörperabmessungen auf die absoluten Dehnungen und Schlupfbeträge bei der Analyse der Verbundwirkung eliminiert werden. Außerdem wird mit der Berücksichtigung verschiedener Modellparameter das Verbundverhalten im verschieblichen Verbund variiert, während der starre Verbund mit den maßgebenden Verbundmechanismen Adhäsion, Mikroverzahnung und Haftreibung in den Varianten a) und b) identisch modelliert ist, vgl. Tabellen 6.3 und 6.4. Darüber hinaus werden im Folgenden ergänzende numerische Untersuchungen vorgestellt und ausgewertet.

Die analytische Näherungslösung zur Kraftübertragung im starren Faser-Matrix-Verbund von MUKI & STERNBERG in Abbildung 4.2 ist in Abhängigkeit des Faserradius, der Einbindelänge und des Steifigkeitsverhältnisses von Faser und Matrix formuliert. Letzteres spielt in den vorliegenden Konfigurationen eine untergeordnete Rolle, da nur geringe Abweichungen in der Matrixsteifigkeit auftreten und somit alle Varianten ein Steifigkeitsverhältnis  $E_s/E_c$  zwischen 4,0 und 4,5 aufweisen. In der folgenden Abbildung 6.25 sind die Verteilungen der Verbundschub- und -normalspannungen über die jeweilige Einbindelänge der untersuchten Konfigurationen vor dem Beginn der Kontaktzonenrissbildung dargestellt. Die Verläufe zeigen, dass die Änderung der Verbundschubspannung über die Verbundlänge mit abnehmendem Faserdurchmesser zunimmt und somit eine geringere Verbundlänge zur Einleitung der Auszugskraft erforderlich ist. Entsprechend verschwindet die Verbundschubspannung zum Ende der im Bezug auf den Faserdurchmesser  $d_f = 0,48\text{ mm}$  kurzen Verbundlänge bei Variante MU2 nicht. Ergänzend sind in Abbildung 6.25 die Verbundspannungsverläufe für eine Variante der Konfiguration BS mit halbierten Einbindelänge, bezeichnet als BSk, dargestellt. Anders als von MUKI & STERNBERG in Abbildung 4.2 angegeben, bewirkt die verkürzte Einbindelänge nach Abbildung 6.25 eine Vergrößerung der Verbundschubspannungen am Faserende.

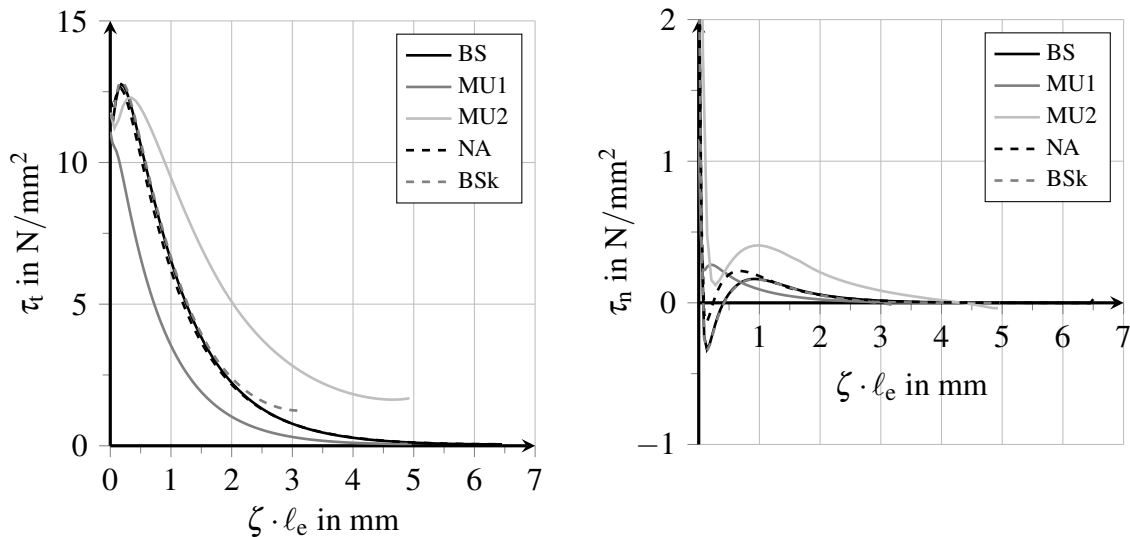


Abbildung 6.25: Verbundschubspannungen und Verbundnormalspannungen über die verschiedenen Einbindelängen vor Beginn der Ablösung

Die Korrelation der Auswirkungen einer Verkürzung der Einbindelänge bei BS und BSk und einer Vergrößerung des Faserdurchmessers bei MU1 und MU2 bestätigt den Einfluss der Faserschlankheit auf die Verbundspannungsverteilung. Mit der Definition der Faserschlankheit nach MUKI & STERNBERG  $\lambda_f = \ell_e / r_f$  weist die Variante MU2 mit  $\lambda_f = 20,8$  die geringste Schlankheit auf, gefolgt von BSk mit  $\lambda_f = 34,2$ . Bei den übrigen Konfigurationen unterscheidet sich die Faserschlankheit, die etwa doppelt so groß wie bei BSk ist, nur geringfügig.

Der Verlauf der Verbundschubspannungen über die Verbundlänge ist außerdem abhängig von der Verbundsteifigkeit im quasi-starren Verbund, die in dieser Modellierung nicht unendlich hoch ist. Inwiefern eine geringfügige Nachgiebigkeit der räumlich ausgedehnten ITZ realistisch ist, konnte bislang in experimentellen Untersuchungen mit bildgebenden Verfahren nicht abschließend geklärt werden. Unter der Voraussetzung, dass die angenommene Verbundsteifigkeit realistisch ist, ist eine Fasereinbindelänge von etwa  $\ell_e = 60 \cdot r_f$  erforderlich, um eine optimale Kraftübertragung zwischen Faser und Matrix zu ermöglichen und damit ein ausreichend hohes Potenzial für die Faserwirksamkeit zu generieren. Demnach weisen die Konfigurationen BSk und MU2 nur etwa 57 % respektive 35 % der erforderlichen Einbindelängen auf. Anders formuliert ergeben diese Untersuchungen, dass mindestens eine Faserschlankheit  $\lambda = \ell_e / r_f$  von 60 empfohlen wird, um eine optimale Kraftübertragung im starren Verbund zu gewährleisten.

Die dargestellten Spannungsverläufe in Abbildung 6.25 zeigen außerdem den Einfluss der Matrixverformung am Faseraustrittsort, der durch die Singularität verstärkt wird, auf die Spannungsverteilung, vgl. Abbildung 6.19. Während die Verbundzone an der Matrixoberkante durch die Verformung unter Querkraft gesetzt wird, kommt es bei einigen Varianten zu einer Kontaktpressung unterhalb des Faseraustrittsortes, wie in der rechten Darstellung in Abbildung 6.25 zu erkennen. Mit der Verformung setzt, wie eingangs erwähnt, auch eine Schädigung und Verfestigung der Matrix infolge des ringförmig um den Faseraustrittsort ausgebildeten Spannungs-Deformations-Zustandes ein, die bei den Varianten BS und BSk auch eine vorzeitige Schädigung der Verbundzone in diesem Bereich induziert. Die Verbundschubspannungsverläufe vor der Ablösung lassen eine ähnliche Tendenz bei den Konfigurationen NA und MU2 erkennen, wobei nur bei Variante NA zumindest zeitgleich mit dem Beginn der Faserablösung von der Matrix

eine Verbundzonenschädigung unterhalb des Faseraustrittsortes auftritt. Maßgebend für diesen Schädigungsprozess der Verbundzone ist neben dem Faserdurchmesser vor allem die Betonzugfestigkeit, die das Materialverhalten der Matrix in diesem Bereich steuert. Alle modellierten Betone weisen eine Zugfestigkeit auf, die unterhalb der initialen Verbundfestigkeit liegt. Da die Annahme einer Korrelation zwischen der Verbundfestigkeit und der Betonzugfestigkeit bei UHPC in der Literatur weit verbreitet ist, ist das Auftreten von derartigen Schädigungsprozessen außerhalb der numerischen Simulationen fraglich. Experimentelle Untersuchungen, die Dehnungen, Rissbildungen und Schädigungen im Bereich des Faseraustrittsortes erfassen, liegen dazu bislang nicht vor, sodass der tatsächliche Zustand der Matrix im Bereich des Faseraustrittsortes unabhängig von der Singularität nicht bekannt ist.

Das Debonding und Phase II des Auszugverhaltens beginnen mit der Überschreitung der Verbundfestigkeit am Faseraustrittsort. Der Modellierung des Verbundverhaltens entsprechend treten im quasi-starren Verbund in Abhängigkeit der Verbundsteifigkeit  $E_r$  reversible, elastische Relativverschiebungen auf, die einer Verzerrung der räumlich ausgedehnten ITZ entsprechen. Die Größe der zulässigen elastischen Relativverschiebungen ist im Modell mit dem Parameter  $s_c$  festgelegt. Eine Faser, die einen beginnenden Mikroriss mittig und senkrecht zum Rissufer überbrückt, wird demnach bei einer Rissöffnung von

$$w_I = 2 \cdot s_c \cdot (1 + \epsilon_{zz,f}) \quad (6.29)$$

am Faseraustrittsort von der Matrix abgelöst. Für alle Konfigurationen beträgt diese Rissweite bei einer noch geringen Faserdehnung etwa  $w_I = 0,002 \text{ mm}$ . Die Bildung des Kontaktzonenrisses ist abgeschlossen, wenn auch am Faserende eine Relativverschiebung von  $s_c$  auftritt, mit der die Verbundfestigkeit, die nicht durch einwirkenden Querdruck vergrößert wird, überschritten wird. Überschlüssig lässt sich die Rissöffnung bei vollendeter Ablösung zwischen Faser und Matrix dann mithilfe der Schlupfdifferenz nach Gleichung (6.28) zu

$$w_{II} = 2 \cdot (s_c + \Delta \delta_t) \cdot (1 + \epsilon_{zz,f}) \quad (6.30)$$

ermitteln.

Sehr ähnliche Rissweiten ergibt auch die Gleichung (2.9) zur Bestimmung der Rissweite bei Erreichen der Faserwirksamkeit. Aufgrund der abweichenden Faserzugspannungen in diesem Zustand des Faser-Matrix-Verbundes, ergeben sich hier sehr unterschiedliche Rissweiten für die untersuchten Konfigurationen. Mit der Konfiguration BS wäre demnach mit etwa  $w_{II} = 0,056 \text{ mm}$  die größte Rissöffnung bis zum Beginn der Faserauszugphase möglich, während die Konfigurationen MU2 und BSk nur eine Rissweite von ca.  $w_{II} = 0,014 \text{ mm}$  respektive  $w_{II} = 0,015 \text{ mm}$  zulassen. Diese Diskrepanz weist auf gravierende Auswirkungen der im Verhältnis zum Faserdurchmesser zu kurzen Fasereinbindelänge auf das Potenzial der Fasertragwirkung hin. Der Vergleich der Auszugkräfte am Beginn und am Ende des Debondings zeigt, dass diese beiden Varianten zu Beginn der Ablösung bereits mehr als 40 % ihrer Tragfähigkeit erreicht haben, während die übrigen Varianten erst um die 20 % ihres Potenzials ausgeschöpft haben. Diese Ergebnisse sind nur im Hinblick auf die numerischen Simulationen und unter der Bedingung, dass die getroffenen Annahmen Gültigkeit besitzen, aussagekräftig. Eine vergleichbare, detaillierte Analyse von Daten aus experimentellen Faserauszugversuchen für den Bereich der Faserablösung erfordert eine sehr genaue Auflösung der Verformungen des Faser-Matrix-Verbundes ohne zusätzliche Einflüsse und Schlupfbeträge aus der Versuchseinrichtung und ist auf der vorliegenden Datengrundlage nicht möglich.

Neben der Faserschlankeit beeinträchtigen auch andere Einflussfaktoren die potenzielle Ausnutzung der Tragfähigkeit des ungerissenen Faser-Matrix-Verbundes. Beispielsweise können herstellungsbedingte Fehlstellen oder etwa schwindinduzierte Mikrorisse eine vorzeitige Ablösung der Faser von der Matrix bewirken. Das entwickelte Verbundmodell sieht darüber hinaus die Berücksichtigung von anisotropem Materialverhalten in der Grenzschicht vor. So hat etwa eine Herabsetzung der Haftzugfestigkeit mithilfe des Modellparameters  $\lambda$  Auswirkungen auf den Zeitpunkt und den Deformationszustand zum Beginn der Ablösung. Vergleichsuntersuchungen zeigen, dass bei der Wahl von  $\lambda = 0,6$  die Ablösung zu einem etwas früheren Zeitpunkt beginnt, da die Haftzugfestigkeit der Grenzschicht am Faseraustrittsort überschritten wird. Im weiteren Verlauf des Faserauszuges hat das anisotrope Materialverhalten aufgrund der insgesamt geringen Bedeutung von Querdruck- und Querkzugspannungen in der Modellkonfiguration BS keinen signifikanten Einfluss.

Nach der Auflösung des starren Verbundes unterliegt die Verbundwirkung einer irreversiblen Degradation infolge der Verbundzonenschädigung. Im entwickelten Verbundmodell wird der Schädigungszuwachs gemäß Gleichung (4.47) durch inelastische Relativverschiebungen zwischen Faser und Matrix, normiert auf die Faserumfangslänge, generiert. Durch diese Normierung ist das Schädigungswachstum anders als in der Formulierung der Verbundzonenschädigung von COX & HERRMANN, die eine Normierung auf den Rippenabstand bei konventionellem Bewehrungsstahl vorschlagen, direkt abhängig vom Faserdurchmesser, vgl. Kapitel 4.1 und 4.2. Damit wird indirekt dem Einfluss der Grenzschichtdicke Rechnung getragen, die im Modell auf eine zweidimensionale Kontaktzone reduziert ist, und eine Skalierbarkeit der Verbundwirkung sichergestellt. Eine Verifikation dieser Modellannahme ist auf der Grundlage der vorliegenden Daten nicht möglich. Im Folgenden wird ihre Auswirkung anhand der Simulationsergebnisse diskutiert.

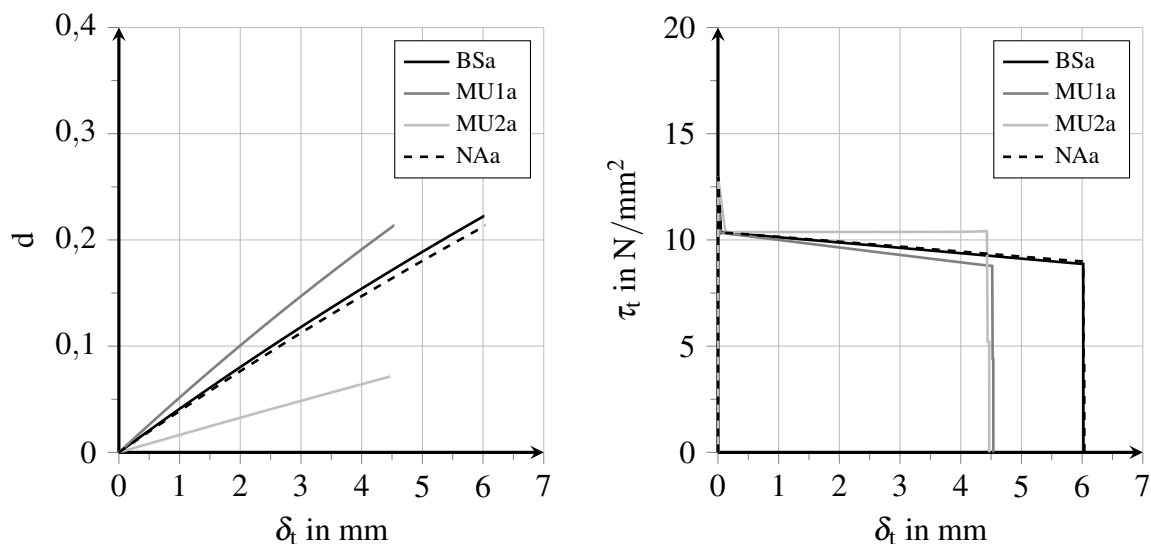


Abbildung 6.26: Verbundzonenschädigung und Verbundschubspannungen über die lokale Relativverschiebung im Bereich des Faseraustrittsortes

Die vorstehende Abbildung 6.26 zeigt die Entwicklung der Verbundzonenschädigung und der Verbundschubspannungen über die lokale Relativverschiebung parallel zur Auszugrichtung, ausgewertet ca. 0,45 mm unterhalb des Faseraustrittsortes. Die Entwicklung der Verbundzonenschädigung  $d$  verläuft über die Relativverschiebung von 4 bis 6 mm aufgrund des geringen

Schädigungswachstumsfaktors  $\alpha$  in der Kalibrierungsvariante a) nach Tabelle 6.3 nur geringfügig nichtlinear. Dabei entspricht die inelastische Relativverschiebung näherungsweise dem totalen Schlupf. Entsprechend der Entwicklungsgleichung (4.47) ist das Schädigungswachstum dabei von der Faserumfangslänge  $u_f$  abhängig, die wiederum direkt den Einfluss des Faserdurchmessers widerspiegelt.

Analog zu dem annähernd linearen Schädigungswachstum erfolgt die Degradation der Verbundkapazität. Der gleichmäßige Verlauf der übertragenen Verbundschubspannung  $\tau_t$  über die Relativverschiebung in Abbildung 6.26 rechts weist auf keinen weiteren signifikanten Einfluss wie beispielsweise querdruckinduzierte Reibung hin. Dabei erfolgt trotz abweichender inelastischer Aufweitung infolge der unterschiedlichen Beanspruchungen eine ähnliche Querdruckentwicklung in allen untersuchten Konfigurationen mit dem Modellparametersatz a), deren Maximalwert in Abhängigkeit der lokalen Relativverschiebung bei unterschiedlichen Schlupfbeträgen erreicht wird. Der reduzierten Degradation entsprechend verläuft insgesamt der Auszugwiderstand bei Konfiguration MU2a in Abbildung 6.16 b) am ehesten linear über den Schlupf, was auch die Versuchsergebnisse in Abbildung 6.16 a) erahnen lassen.

In Abbildung 6.16 b) sind infolge dieser unterschiedlichen Schädigungsentwicklung Abweichungen beim Lastabfall im Zuge der vollendeten Ablösung der Kontaktflächen voneinander zu erkennen. Dabei verzerrt der Bezug des Auszugwiderstandes auf den Schlupf an der Faserspitze die Schlupfbeträge in Abbildung 6.16. Das lokale Verbundverhalten weist dabei ebenfalls Abweichungen des Spannungsabfalles über die Relativverschiebung auf, vgl. Abbildung 6.26 rechts. Der Modellparameter  $d_d$  reguliert den Verbundspannungsabfall bei der Auflösung des starren Verbundes in Abhängigkeit der Verbundzonenschädigung. Daher ist bei Konfiguration MU2 ein flacherer Verlauf des Spannungsrückganges als bei den übrigen Konfigurationen zu erwarten, da der benötigte Schlupfbetrag bis zum Erreichen der zulässigen Schädigungsgrenze  $d_d$  deutlich vergrößert ist. Auch in dieser Auswirkung ist die Skalierung des Verbundverhaltens bei unterschiedlichen Faserdurchmessern zu erkennen. Bis zum Erreichen desselben Zustandes der Verbundzone mit identischer Verbundzonenschädigung und verbleibender Verbundspannung ertragen Verbundkörper mit größeren Faserdurchmessern deutlich mehr Relativverschiebungen. Eine ähnliche Tendenz ist auch in Abbildung 6.11 zu erkennen, in der die Versuchsergebnisse aus München mit zwei unterschiedlich dicken Fasern mit ansonsten nahezu identischer Versuchskonfiguration gegenübergestellt sind. Der Abfall des Auszugwiderstandes ist in beiden Kurvenverläufen deutlich zu erkennen und geht augenscheinlich mit unterschiedlichen Schlupfbeträgen einher. Der auffällige Verlauf der Auszugkraft bei der dünneren Faser MU1 könnte außerdem auf eine vergrößerte Schädigungsentwicklung und in der Folge auf ein verstärktes Mikro-Interlocking hindeuten. Die Auswertung der vergleichenden Simulationen mit Parametersatz b) nach Tabelle 6.4 wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels vorgestellt.

In Analogie zu den Auswirkungen der Faserschlankheit auf die Kraftübertragung in Auszugphase I ohne Kontaktzonenrissbildung, weisen die Einbindelänge und der Durchmesser der Faser auch in der Faserauszugphase einen signifikanten Einfluss auf die Verbundspannungsverteilung auf. Mit der Faserschlankheit nimmt auch die Schlupfdifferenz deutlich ab, sodass die übertragenen Verbundspannungen beim Herausziehen der Faser nahezu konstant über die Verbundlänge verteilt sind.

In der Modellvariante b) mit der veränderten Formulierung der Degradation und den abweichenden Modellparametern nach Tabelle 6.4 wird die Schädigungsentwicklung infolge von inelastischen Relativverschiebungen verstärkt und anstelle einer Degradation der Verbundkapazität



zität eine Verfestigung der Verbundzone beschrieben. Das Verbundmodell bildet so eine stark ausgeprägte Verzahnung der Kontaktoberflächen ab, die bei der Ablösung zunächst zu einem erheblichen Schädigungswachstum und bei weiter zunehmenden lokalen Relativverschiebungen zu Interlocking-Effekten der sich verkeilenden Partikel in der Grenzschicht führt, vgl. Kapitel 3.4. Das Mikro-Interlocking wird dabei über die gesamte Verbundzone verschmiert und nicht, wie tatsächlich zu erwarten, als lokales Ereignis modelliert. Analog zu Modellvariante a) entwickelt sich daher auch bei diesem Verbundverhalten eine geringe Schlupfdifferenz, die eine gleichmäßige Verteilung der Verbundspannungen ermöglicht und so die Gültigkeit der Annahmen zur Kalibrierung nicht einschränkt. Auch bei diesen numerischen Simulationen stellt sich in der Faser ein linearer Verlauf der Längsspannungen und -dehnungen ein. Die folgende Abbildung 6.27 zeigt die Entwicklung der Verbundzonenschädigung und der übertragenen Verbundschubspannungen für die Variante b), vgl. Abbildung 6.26. Analog zu den Ergebnissen der Modellvariante a) ist der Einfluss des Faserdurchmessers auf die Schädigungsentwicklung deutlich zu erkennen. Dabei wird die Verbundzone in der Variante MU2b im Bereich des Faseraustrittortes insgesamt nicht einmal halb so stark geschädigt wie bei den übrigen Konfigurationen. Entsprechend schwach ausgeprägt ist die Verfestigung, die in quadratischer Abhängigkeit von der Verbundzonenschädigung die lokale Verbundkapazität vergrößert. Da aufgrund des geringen Querdruckentwicklungskoeffizienten  $\eta$  keine signifikante Querdruckentwicklung zu erwarten ist, verläuft der Auszugswiderstand dem Verbundwiderstand entsprechend bei Variante MU2b nahezu linear über den Schlupf in der Faserauszugphase, während sich bei den übrigen Konfigurationen der deutliche Anstieg des lokalen Verbundwiderstandes im Auszugverhalten widerspiegelt, vgl. Abbildung 6.17 b).

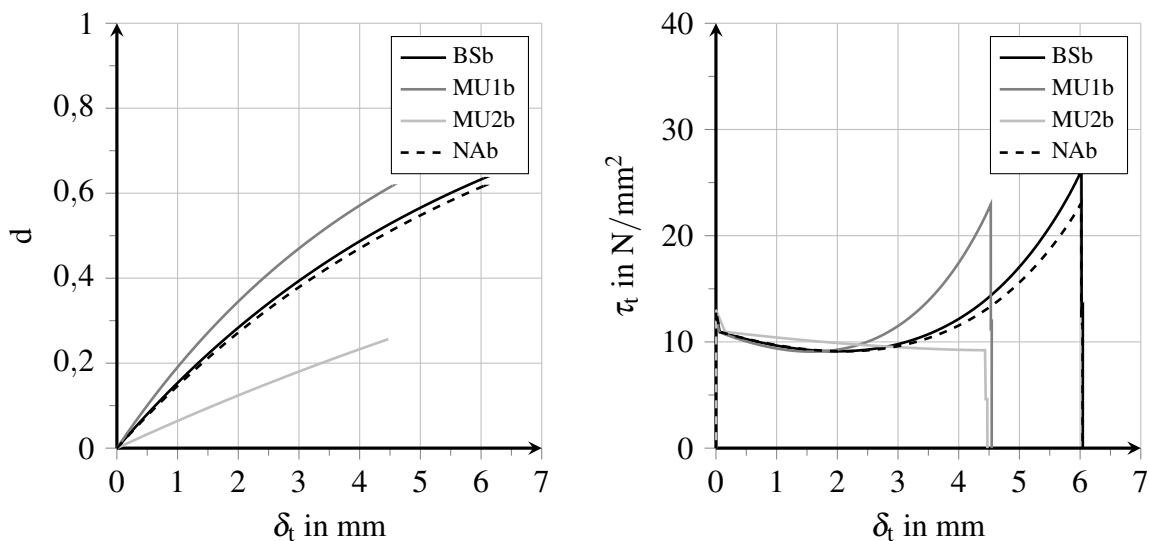


Abbildung 6.27: Verbundzonenschädigung und Verbundschubspannungen über die lokale Relativverschiebung im Bereich des Faseraustrittsortes

Die Versuchsergebnisse in Abbildung 6.11 von MU1 und MU2 im Vergleich deuten, wie bereits erwähnt, auf einen Einfluss des Faserdurchmessers auf den lokalen Verbundwiderstand hin, der sich mit der Interpretation als Auswirkung durch Mikro-Interlocking infolge einer verstärkten Verbundzonenschädigung erklären lässt. Während die Versuchsergebnisse aus Nanjing ebenfalls eine derartige Tendenz aufweisen, zeigen die Versuche aus Braunschweig dieses nichtlineare Auszugverhalten trotz des geringen Faserdurchmessers nicht, vgl. Abbildung 6.17 a). Diese

Diskrepanz zwischen experimentellen und numerischen Ergebnissen ist damit zu erklären, dass in den Braunschweiger Versuchskonfigurationen tatsächlich eine weniger ausgeprägte Verzahnung vorherrscht als im Rahmen der Kalibrierung angenommen. So verläuft auch die mittlere Verbundspannung über den Faserendschlupf in Abbildung 6.14 deutlich weniger nichtlinear als bei den übrigen Versuchsdaten. Die Annahme von identischem Verbundverhalten ermöglicht demnach keine passende Beschreibung des Auszugverhaltens für alle untersuchten Versuchskonfigurationen. Da die Gegenüberstellung der Materialkennwerte in Tabelle 6.1 ebenso wenig wie der Vergleich der Versuchseinrichtung, Probekörpervorbereitung und -herstellung auf derart deutliche Qualitätsunterschiede zwischen den Versuchen der verschiedenen Standorte hinweisen, ist die Richtigkeit der Versuchsauswertung und Kalibrierung entsprechend der zweiten Interpretationsvariante anzuzweifeln. Für eine abschließende Bestätigung oder Widerlegung der Hypothese von WILLE & NAAMAN sind weitere Auswertungen von Faserauszugversuchen mit möglichst bekannter Verbundqualität erforderlich.

Darüber hinaus zeigt die Untersuchung der verschiedenen Interpretationsansätze für die vorliegenden Versuchsdaten die Bedeutung einer einheitlichen Regelung für Faserauszugversuche hinsichtlich einer verbesserten Aussagekraft. Insbesondere die Eliminierung von Herstellungs- und Messungenauigkeiten stellt ein wichtiges Ziel für zukünftige Faserauszugversuche dar. So können die Bestimmung der tatsächlichen Einbindelänge nach der Erhärtung des Betons und die Erfassung des Schlupfes am Faseraustrittsort anstelle des Maschinenweges die Auswertung der Ergebnisse deutlich erleichtern. Das Versagen der Probekörper am Ende des Faserauszugversuches ist dabei präzise zu erfassen, um das Auftreten eines plötzlichen Lastabfalles interpretieren zu können. Auf der Grundlage der durchgeführten numerischen Untersuchungen ist die erste Interpretationsvariante der Versuchsdaten aufgrund der besseren Übereinstimmung von experimentell und numerisch ermitteltem Auszugverhaltens bei Faserauszugversuchen in Abbildung 6.16 zu bevorzugen.

Zur Validierung des Verbundmodells werden außerdem numerische Untersuchungen von Faserauszugproblemen mit abweichenden Fasergeometrien durchgeführt. Das entwickelte Verbundmodell ist grundsätzlich in der Lage, die Verbundwirkung zwischen zusammengesetzten und geneigten Kontaktoberflächen zu beschreiben. Beispielsweise ist in allen numerischen Simulationen zu Faserauszugproblemen zusätzlich zur Mantelfläche der eingebetteten Faser auch ihre Stirnseite mithilfe von Verbundzonenelementen aufgelöst, sodass eine zur Oberfläche orthogonale Kraftübertragung bis zur Ablösung der Kontaktoberflächen berücksichtigt wird. Die Überschreitung der Haftzugfestigkeit führt dabei zur Kontaktzonenrissbildung mit sofortigem Kontaktverlust. Im Gegensatz dazu zeichnen sich gewinkelte Fasergeometrien durch die Entstehung einer lokal vergrößerten Querdruckspannung aus, die insbesondere im Bereich von scharfkantigen Übergängen zwischen zusammengesetzten Geometrien durch die Singularitätswirkung verstärkt wird. Die im Folgenden beschriebenen numerischen Untersuchungen an schiefwinklig eingebetteten Fasern und Fasern mit mechanischer Endverankerung zeigen, dass der in Kapitel 5.3 vorgestellte Algorithmus zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung für die Beschreibung der Verbundwirkung bei stark ausgeprägter Kontaktpressung nicht genügend ausgereift ist und eine vorzeitige Deaktivierung der Verbundzonenelemente feststellt. Dieser Effekt führt schließlich bei beiden FE-Modellen zu Konvergenzproblemen bei der Lösung des globalen Gleichungssystems. Eine vergrößerte Verbundsteifigkeit, die ein Verschieben der Kontaktoberflächen gegeneinander verhindert und so die Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung sicherstellt, führt dabei zu einer Verstärkung der Singularitätswirkung und somit zu unphysikalischen Spannungs-Deformations-Zuständen. Dennoch ermöglichen die Untersuchungen einen

Einblick in das durch geometrische Verformung der Faser veränderte Spannungs-Deformations-Verhalten des Faser-Matrix-Verbundes.

In der folgenden Abbildung 6.28 sind Ergebnisse der numerischen Analysen des Auszugverhaltens einer endverankerten Faser und einer schiefwinkelig eingebetteten Faser dargestellt. Die linke Darstellung zeigt einen Ausschnitt der Schubspannungen  $\sigma_{xz}$  um die Faser. Genau wie bei geraden Fasern schreitet die Kontaktzonenrissbildung mit zunehmender Beanspruchung vom Faseraustrittsort in Richtung des eingebetteten Faserendes fort und generiert Schubspannungen entlang der Verbundlänge, die hier an den Seiten der Faser entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen. Dabei entwickelt sich im Bereich der Fasenumlenkung ein kritischer Spannungszustand, der durch die Singularität der scharfkantigen Neigungsänderung verstärkt wird. Daraus folgt, dass die Wirksamkeit der mechanischen Endverankerung erst mit dem Debonding in diesem Bereich generiert wird, während die Auszugphase I und die beginnende Kontaktzonenrissbildung nahezu unbeeinflusst durch die geometrische Verformung sind.

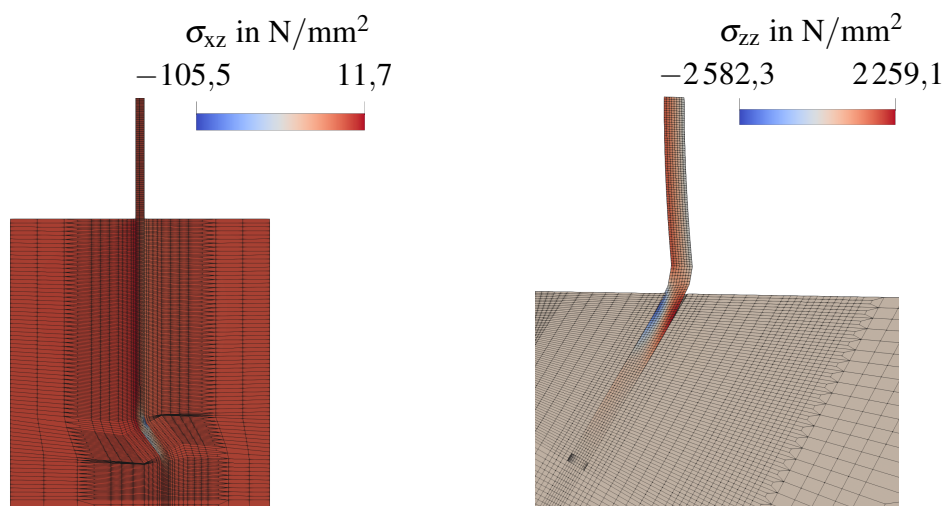


Abbildung 6.28: Verbundzonenschädigung und Verbundschubspannungen über die lokale Relativverschiebung im Bereich des Faseraustrittsortes

Im Gegensatz dazu wirkt sich die Neigung einer rissüberbrückenden Faser bereits mit dem Beginn der Beanspruchung auf den Auszugswiderstand aus. In Abbildung 6.28 rechts sind in einem vergrößerten Ausschnitt um die Faser Spannungen in vertikaler Richtung dargestellt. Der Bereich des Faseraustrittsortes erfährt signifikant von nicht geneigten Faserauszugproblemen abweichende Spannungen. Während die Faser im dargestellten Zustand bereits von der Matrix abgelöst ist und herausgezogen wird, führt der kritische Bereich des Faseraustrittsortes zum Abbruch der Simulation.

In experimentellen Untersuchungen mit geneigten Fasern werden im Bereich des Faseraustrittsortes Sekundärrisse parallel zum aufgehenden Riss und Ausbrüche von Betonkegeln beobachtet, vgl. z. B. [Gre06], [EOL<sup>+</sup>20]. Die numerisch ermittelten Spannungen im oberen Bereich der eingebetteten Faser deuten ebenfalls auf kritische Spannungen innerhalb der Matrix hin. Gleichzeitig verstärkt die Kontaktpressung signifikant die Verbundwirkung, sodass eine zunehmende Relativverschiebung der Faser erschwert ist. Darüber hinaus ist in beiden Untersuchungen eine erhebliche Krümmung der vergleichsweise steifen Faser im Faserkanal zu beobachten, die entlang des Faserkanals abwechselnd Querdruck- und Querkzugspannungen erzeugt. Wie bereits

erläutert, führen insbesondere Querdruckspannungen im entwickelten Verbundmodell zu erheblich vergrößerten Verbundwiderständen, die zum Teil infolge von Singularitäten unphysikalische Größenordnungen erreichen können.

## 6.3 Auswertung der Fasertragwirkung

Neben der Verbesserung des Rissbildes im Nachbruchbereich ist bei UHPFRC vor allem die Tragfähigkeitssteigerung durch die Zugabe überkritischer Fasergehalte und ihre Erfassung in einer Bemessung von Interesse. Die numerische Analyse des Faserauszugverhaltens ermöglicht die Auswertung der Faserwirksamkeit, die bei Berücksichtigung der Faserverteilung und -orientierung als makroskopische Eigenschaft die Leistungsfähigkeit von faserbewehrtem UHPC beschreibt. Im Folgenden wird ein Überblick über die Fasertragwirkung in UHPFRC gegeben. Neben herstellungsbedingten Imperfektionen und Fehlstellen beeinträchtigen vor allem Vorschädigungen des Gefüges den Faser-Matrix-Verbund. Die folgende Untersuchung des Faserauszugverhaltens bei wiederkehrender Be- und Entlastung zeigt, dass auch Ermüdungsvorgänge in der Verbundzone die Wirksamkeit der Faserverstärkung reduzieren.

### 6.3.1 Numerische Analyse der Verbundermüdung

Die Ermüdung des Verbundes ist durch Ermüdungsprozesse der Einzelkomponenten wie beispielsweise eine schädigungsinduzierte Gefügelockerung oder Relaxation sowie durch die fortschreitende Ablösung der Kontaktoberflächen voneinander geprägt, vgl. Kapitel 3.5. Für faserbewehrten UHPC bedeutet die Schwächung der Verbundzone infolge zyklischer Beanspruchungen eine signifikante Verringerung des verbleibenden Ermüdungswiderstandes und der Tragfähigkeit. Dabei geht experimentellen Untersuchungen zufolge die Schwächung der Verbundzone mit einer über die Lastwechselzahl veränderlichen Verteilung und Größe des Schlupfes und der Verbundspannung zwischen Faser und Matrix einher, vgl. Kapitel 3.5. In der folgenden numerischen Analyse werden die Auswirkungen einer zyklischen Zugbeanspruchung auf eine teilweise abgelöste, in UHPC eingebettete Faser basierend auf Modellkonfiguration BSa zur Analyse des Faserauszugverhaltens in Kapitel 6.2 untersucht.

Die Spannungsschwingbreite der zyklischen Zugbeanspruchung ist mit  $\Delta p_z = 1\,500\text{ N/mm}^2$  so gewählt, dass bei erstmaliger Belastung ein Teil der Faser von der Matrix abgelöst wird und innerhalb von wenigen Lastwechseln Veränderungen des Spannungs-Deformations-Zustandes in der Grenzschicht darstellbar sind. Sie unterschreitet die maximale Faserzugspannung und damit die Tragfähigkeit des Faser-Matrix-Verbundes, die bei einem Faserauszugversuch mit monoton steigender Beanspruchung gemäß den Untersuchungen in Kapitel 6.2 etwas über  $\sigma_{zz,f} = 1\,700\text{ N/mm}^2$  liegt, vgl. Abbildung 6.29. Im Wechsel mit der wiederkehrenden Belastung des Faser-Matrix-Verbundes erfolgt eine vollständige Entlastung, vgl. Abbildung 6.29.

Für die Einleitung einer Zugschwellbeanspruchung an der Faserspitze wird der Kurvenverlauf einer Sinusfunktion gewählt, vgl. Abbildung 6.29. Dieser ermöglicht die Berücksichtigung einer geringeren Zeitschrittweite an den Umkehrpunkten der zyklischen Belastung als in den nahezu linear ansteigenden und abfallenden Bereichen der Beanspruchung.

In der rechten Darstellung in Abbildung 6.29 ist ein Ausschnitt über  $n = 1,5$  Lastwechsel der an der Faserspitze aufgetragenen Zugspannung dargestellt. Während die tatsächliche Re-

chengenauigkeit durch die grau hinterlegte Kurve angedeutet ist, stellen die markierten Punkte diejenigen Zeitpunkte oder Belastungsstufen dar, zu denen im Rahmen der numerischen Simulation der Zustand des Faser-Matrix-Verbundes ausgegeben wird. Dabei werden nur für jeden 20. Berechnungsschritt Ergebnisse herausgeschrieben, um eine genaue Nachvollziehbarkeit der Prozesse bei einer akzeptablen Datenmenge sicherzustellen. Die hohe Auflösung der Zugschwellbeanspruchung ist aufgrund der physikalischen und geometrischen Nichtlinearität des Ablösungsprozesses zwischen Faser und Matrix zur Sicherstellung einer stabilen Konvergenz der numerischen Simulation erforderlich.

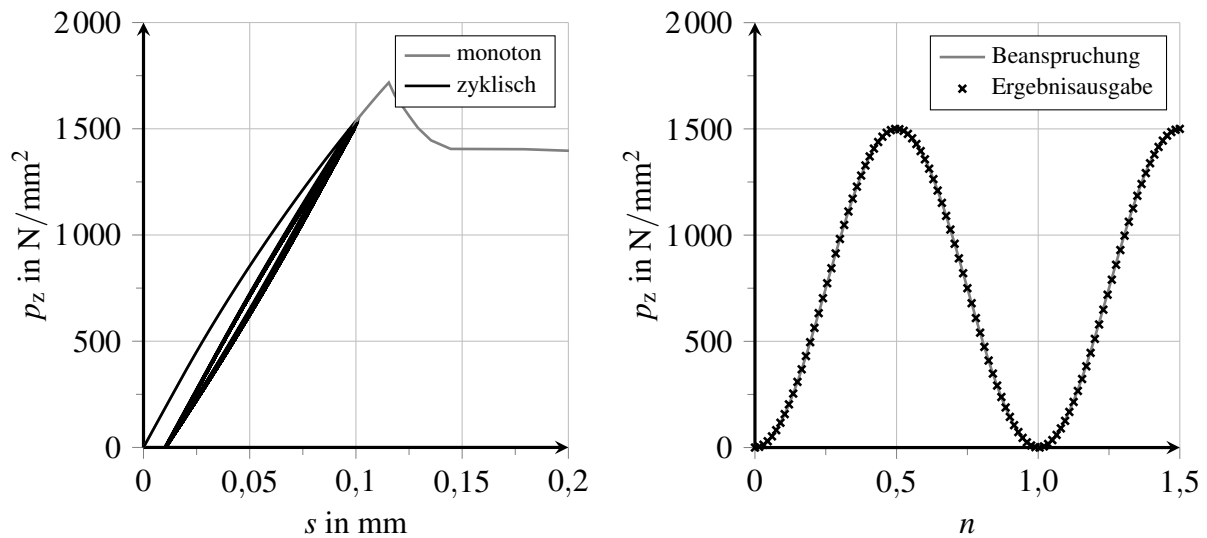


Abbildung 6.29: Faserauszugsimulation mit wiederkehrender Be- und Entlastung

Für die Auswertung der Ermüdungsvorgänge in der Verbundzone ist zunächst der Zustand des Faser-Matrix-Verbundes nach dem ersten Lastwechsel von Interesse. Mit erstmaliger Belastung der Faser bis zur Oberspannung von  $p_z = 1500 \text{ N/mm}^2$  stellt sich Phase II des charakteristischen Auszugsverhaltens entsprechend ein partieller Ablösungszustand des Faser-Matrix-Verbundes ein, vgl. Kapitel 3.3 und 6.2. Durch den irreversiblen Übergang von starrem zu verschieblichem Verbund werden über etwa 70% der Verbundlänge inelastische Relativverschiebungen und eine Verbundzonenschädigung generiert, vgl. Abbildungen 6.32 und 6.33. Die nun wirksamen Verbundmechanismen Gleitreibung und Mikro-Interlocking führen zu einem über diesen Teil der Verbundlänge annähernd konstanten hohen Verbundwiderstand, vgl. Abbildung 6.34. Bei Entlastung der Faser verhindert der Verbundwiderstand im abgelösten Verbundbereich das vollständige Zurückziehen der sich entspannenden Faser, sodass ein Eigenspannungszustand im Faser-Matrix-Verbund verbleibt, vgl. Abbildung 6.30. Die Auswirkungen dieses Zustandes auf die Verbundzone und die Komponenten Faser und Matrix werden im weiteren Verlauf dieses Kapitels diskutiert.

In Abbildung 6.31 ist der Verlauf der Längszugspannungen  $\sigma_{zz,f}$  in Fasermitte über die bezogene Verbundlänge  $\zeta$  in den ersten beiden Spannungsumkehrpunkten, d. h. bei vollständiger Be- und Entlastung innerhalb des ersten Lastspiels, dargestellt. Der Vergleich der beiden Spannungsverläufe zeigt, dass der Faser-Matrix-Verbund am eingebetteten Faserende, d. h. bei  $\zeta \rightarrow 1$ , nicht entlastet wird, während die Spannungen am Faseraustrittsort verschwinden.

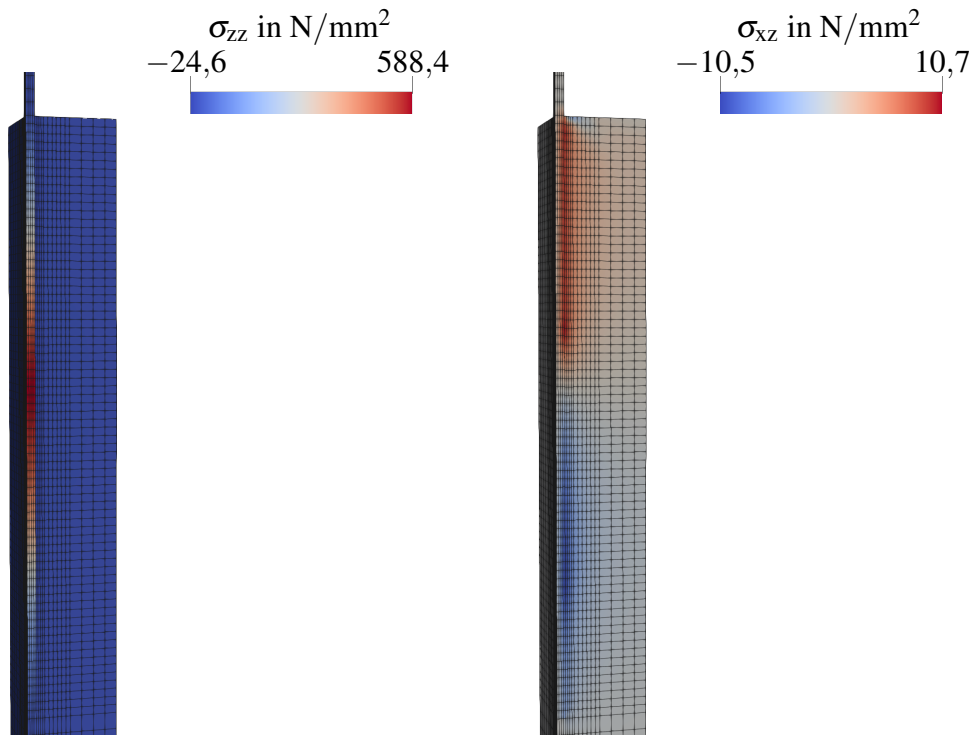


Abbildung 6.30: Ausschnitt aus dem Verlauf der Längs- und Schubspannungen im Faser-Matrix-Verbund nach dem 40. Lastwechsel

Entsprechend den Untersuchungen zu den Singularitätsstellen an den Rändern der Verbundzone in den Kapiteln 6.1 und 6.2 unterliegt die Auswertung des Verbundverhaltens in einigem Abstand zum Rand nicht mehr dem Einfluss der Störung. Daher werden Zustandsveränderungen infolge der zyklischen Beanspruchung für den abgelösten Verbundbereich beispielhaft an der Stelle  $\zeta = 0,07$  ausgewertet.

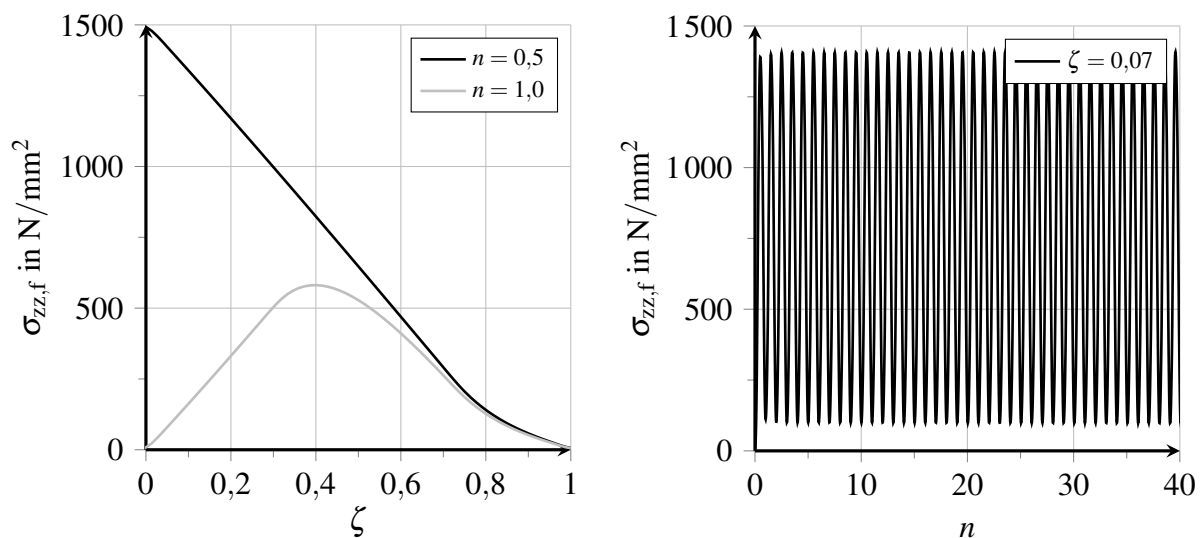


Abbildung 6.31: Längszugspannungen in Fasermitte über die Verbundlänge im ersten Lastspiel und Entwicklung im Bereich des Faseraustrittsortes über weitere Lastwechsel

Die Darstellung der Faserzugspannungen über einige Lastwechsel in Abbildung 6.31 zeigt, dass sich die Spannungsschwingbreite bereits nach wenigen Lastwechseln stabilisiert und es nicht zu signifikanten Umlagerungen der Zugspannungen in der Faser kommt.

Proportional zu den Längszugspannungen verbleiben auch Längs- und Querdehnungen in der Faser. Wie in Kapitel 6.2 gezeigt, gelten die Dehnungen der Faser als maßgebende Ursache der Relativverschiebungen zwischen Faser und Matrix. Daher gehen infolge der verbleibenden Faserdehnungen die bei Belastung generierten Relativverschiebungen in der Grenzschicht nicht vollständig zurück. Die folgende Abbildung 6.32 zeigt die Verläufe der Relativverschiebungen  $\delta_t$  parallel zur Kontaktoberfläche bei erstmaliger Be- und Entlastung sowie die Entwicklung der Relativverschiebung an der Stelle  $\zeta = 0,07$  im Bereich des Faseraustrittsortes über einige Lastwechsel. Ergänzend sind die Verläufe des inelastischen Anteiles  $\delta_t^{\text{in}}$  dargestellt, die aus der Ablösung zwischen Faser und Matrix folgen. Durch die Entlastung der Faser wird die totale Relativverschiebung über die abgelöste Verbundzone bis etwa  $\zeta = 0,7$  verringert, während ihr inelastischer Anteil bei Entlastung nur über die ersten 30 % der Verbundlänge reduziert wird. Bei weiteren Lastwechseln nimmt die Relativverschiebung nahe dem Faseraustrittsort im Mittel kontinuierlich zu.

Die in Abbildung 6.32 dargestellten Verschiebungsverläufe lassen auf einen Vorzeichenwechsel der elastischen Relativverschiebung und der dazu proportionalen Verbundschubspannungen im Bereich von  $\zeta = 0,4$  schließen, vgl. Abbildung 6.34. Die Verbundzone vom Faseraustrittsort bis zu dieser Stelle erfährt eine umgekehrte Schubbeanspruchung, die bei gleichzeitig zunehmender Verbundzonenschädigung eine gegenläufige inelastische Relativverschiebung erzeugt und so den Absolutbetrag des inelastischen Schlupfes in diesem Bereich verringert.

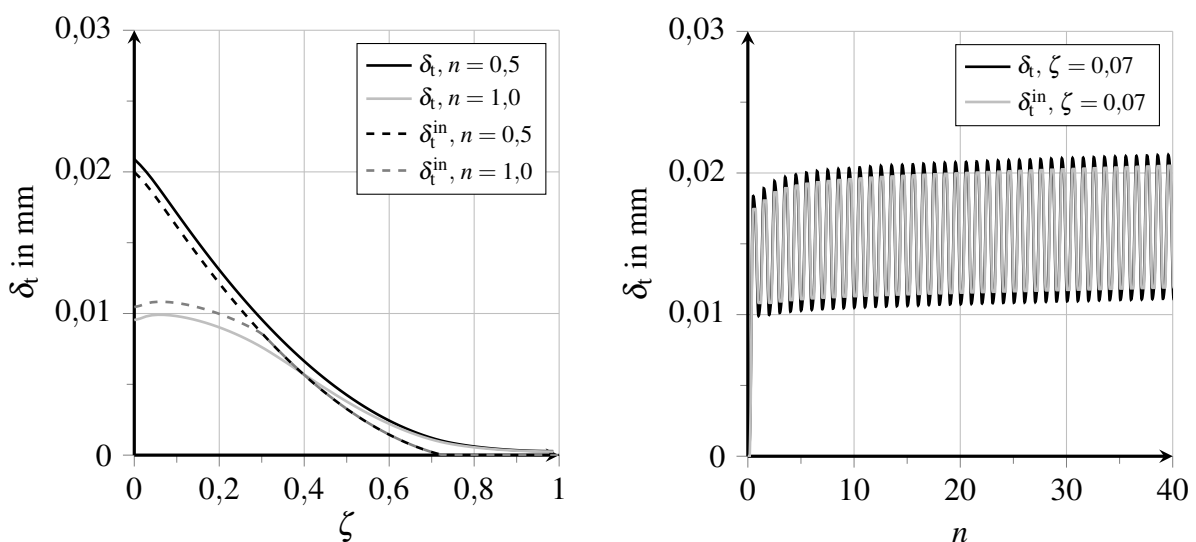


Abbildung 6.32: Parallele Relativverschiebungen über Verbundlänge im ersten Lastspiel und Entwicklung im Bereich des Faseraustrittsortes über weitere Lastwechsel

Die folgende Darstellung der Verbundzonenschädigung über die Verbundlänge in Abbildung 6.33 zeigt drei Zonen mit unterschiedlichem Zustand der Grenzschicht. Im Bereich des eingebetteten Faserendes herrscht starrer Verbund vor und es kommt nicht zu einer Schädigung der Verbundzone. In der Mitte der Grenzschicht zwischen etwa  $\zeta = 0,7$  und  $\zeta = 0,3$  ist keine signifikante Schädigungszunahme zu erwarten, da hier bei Entlastung, wie in Abbildung 6.32 zu

erkennen, keine Verringerung der inelastischen Relativverschiebungen auftritt. In der Nähe des Faseraustrittsortes hingegen nimmt die Verbundzonenschädigung sowohl bei Be- als auch bei Entlastung der Faser zu.

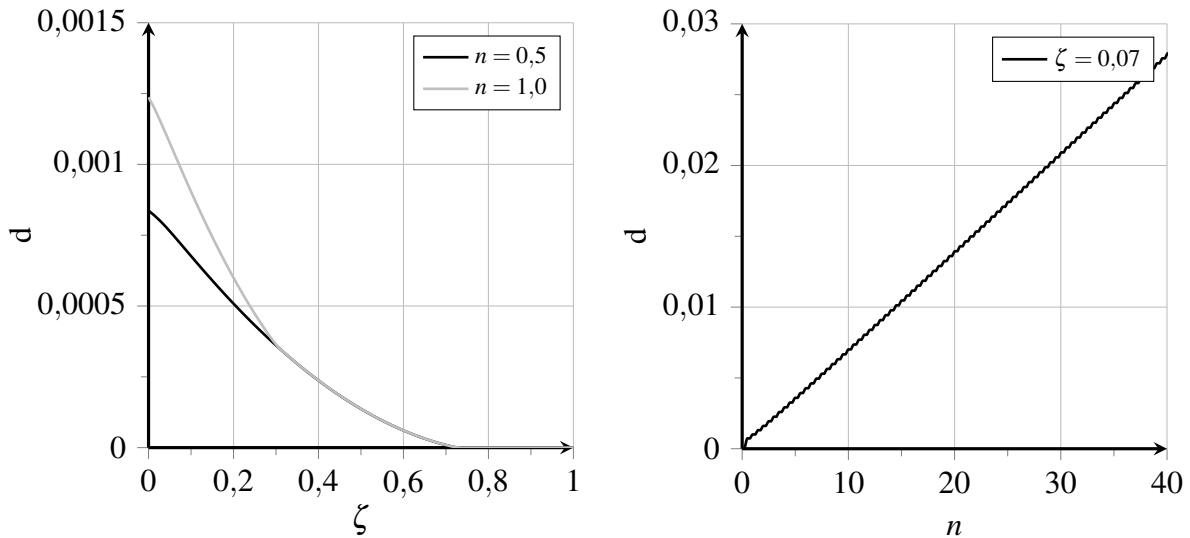


Abbildung 6.33: Verbundzonenschädigung über die bezogene Verbundlänge im ersten Lastspiel und Entwicklung im Bereich des Faseraustrittsortes über weitere Lastwechsel

Dieses Schädigungswachstum erfolgt gemäß der Darstellung der Verbundzonenschädigung über die Lastwechsel in Abbildung 6.33 zunächst nahezu linear infolge der zyklischen Beanspruchung. Aufgrund der gewählten linearen Formulierung des Schädigungsentwicklungspotenzials  $\beta(d)$  in Gleichung (4.48) ist bei gleichbleibender Änderung der inelastischen Relativverschiebung eine immer geringere Schädigungszunahme, d. h. ein Abflachen des Kurvenverlaufes in der rechten Darstellung in Abbildung 6.33, zu erwarten, vgl. Abbildung 4.33.

Mithilfe bildgebender Verfahren kann in experimentellen Untersuchungen nachgewiesen werden, dass durch die wechselnde Bewegungsrichtung sowohl die Faseroberfläche als auch der Faserkanal in der Matrix von einer polierenden und schleifenden Abrasion betroffen sind [Hee17]. Diese Schwächung der Verbundzone führt dabei zu einem Ermüdungsversagen durch einen progressiven Faserauszug [Hee17].

Der Verlauf der Verbundschubspannungen  $\tau_i$  über die Verbundlänge bei Be- und Entlastung des ersten und des 40. Lastwechsels im Vergleich weist auf eine Verschiebung der Zonengrenzen hin, wie in der folgenden Abbildung 6.34 zu erkennen. Infolge der zunehmenden Verbundzonenschädigung verringert sich die übertragbare Verbundschubspannung, sodass die Kontaktzonenrissbildung fortschreitet und sich gleichzeitig der ermüdungsrelevante Bereich am Faseraustrittsort weiter in Richtung der Verbundzonenmitte ausdehnt. Die Verringerung der Verbundkapazität ist dabei direkt von der Verbundzonenschädigung abhängig, vgl. Abbildung 4.32. Darüber hinaus kann hingegen die übertragbare Verbundschubspannung bei Querdruck zusätzlich durch Reibung vergrößert werden. Diese Querdruckspannung in der Grenzschicht wird in Interaktion mit dem umgebenden Beton durch die Aufweitung und Schädigung der Verbundzone generiert, vgl. Abbildung 6.35.



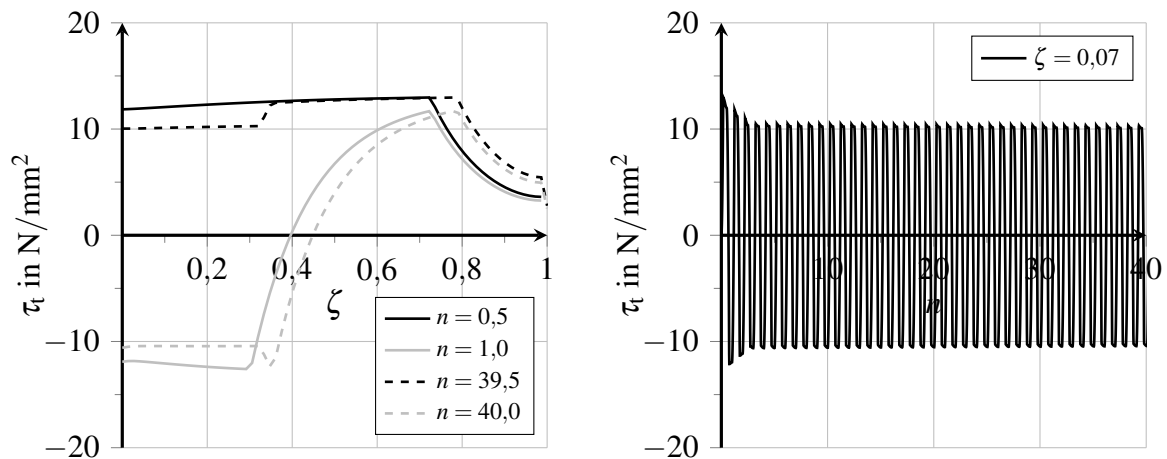


Abbildung 6.34: Verbundschubspannungen über die Verbundlänge im ersten Lastspiel und Entwicklung im Bereich des Faseraustrittsortes über weitere Lastwechsel

Die folgende Abbildung 6.35 zeigt die Verläufe der Verbundnormalspannungen über die Verbundlänge und über einige Lastwechsel. Darin wird deutlich, dass die verschwindende Querkontraktion der Faser bei Entlastung eine Kontaktpression im Bereich des Faseraustrittsortes erzeugt. Ursache für diese Kontaktpression ist die inelastische Aufweitung der Verbundzone, die bei Entlastung des Faser-Matrix-Verbundes nicht verringert wird, vgl. Abbildung 6.36.

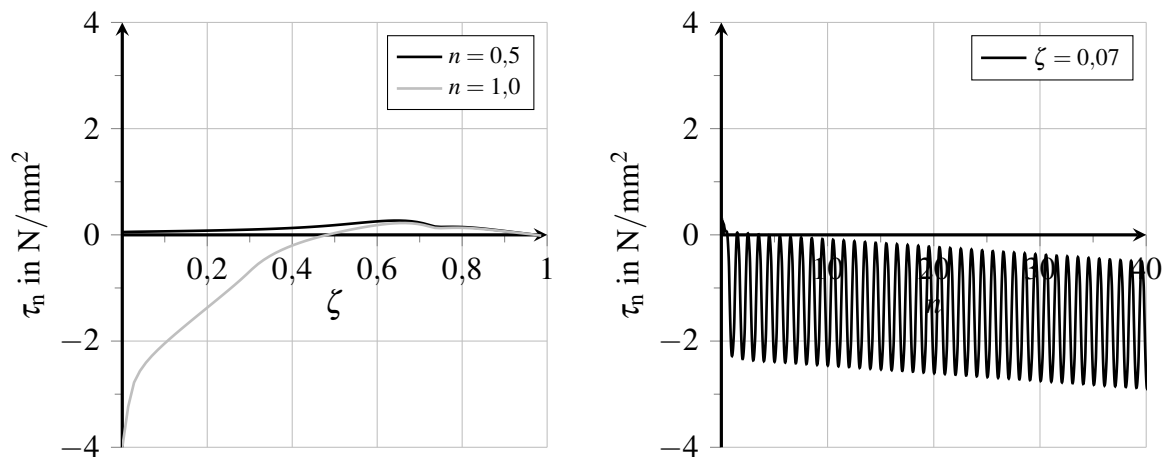


Abbildung 6.35: Verbundnormalspannungen über die Verbundlänge im ersten Lastspiel und Entwicklung im Bereich des Faseraustrittsortes über weitere Lastwechsel

Die Verläufe der totalen und inelastischen Relativverschiebung senkrecht zur Verbundebene in Abbildung 6.36 veranschaulichen, dass der inelastische Anteil der Relativverschiebung mit jeder Belastung weiter zunimmt, während der entgegen gerichtete elastische Anteil eine Querdrukspannung in der Verbundzone erzeugt, vgl. Abbildung 4.22. Die zunehmende Differenz zwischen der inelastischen und der totalen Relativverschiebung senkrecht zur Verbundzone im Bereich des Faseraustrittsortes erklärt dabei die signifikante Vergrößerung des Querdrukes infolge Reibung mit jedem weiteren Lastwechsel, vgl. Abbildung 6.35. Mit der Verstärkung der Gleitreibung wird der Degradation der Verbundkapazität infolge der zunehmenden Verbundzonenschädigung entgegengewirkt, sodass die Amplitude der wechselnden Verbundschubspannung im Bereich des Faseraustrittsortes nahezu konstant bleibt, vgl. Abbildung 6.34.

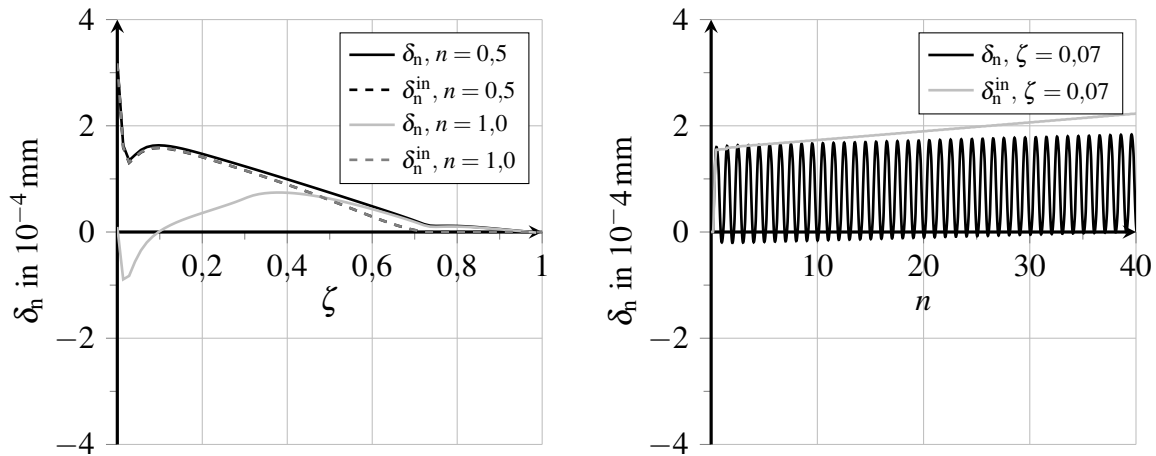


Abbildung 6.36: Normale Relativverschiebungen über Verbundlänge im ersten Lastspiel und Entwicklung im Bereich des Faseraustrittsortes über weitere Lastwechsel

Mit der fortschreitenden Kontaktzonenrissbildung erreicht auch die UHPC-Matrix ihre Zugfestigkeit und erfährt inelastische Dehnungen beziehungsweise Schädigungen. Der plastische Multiplikator  $\lambda_R$  für den Zugbereich des verwendeten Betonmodells mit deaktivierter Schädigungsformulierung zeigt beispielsweise die fortschreitende Plastifizierung der Matrix in Richtung des Faserendes an, vgl. Kapitel 6.1. In der folgenden Abbildung 6.37 sind Matrixstrukturknoten in geringer Entfernung zur Grenzschicht entlang der Verbundzone ausgewertet. Die Verläufe zeigen, dass es nach der Ablösung der Faser von der Matrix zu keiner weiteren Beeinträchtigung der Matrixzugfestigkeit kommt und der Betrag des plastischen Multiplikators nicht weiter zunimmt, vgl. Kapitel 6.2. Dagegen wächst der Betrag nahe dem eingebetteten Faserende infolge der zyklischen Belastung an, wie in Abbildung 6.37 dargestellt. Die Faser verhält sich bei dieser Spannungsschwingbreite kontinuierlich linear-elastisch.

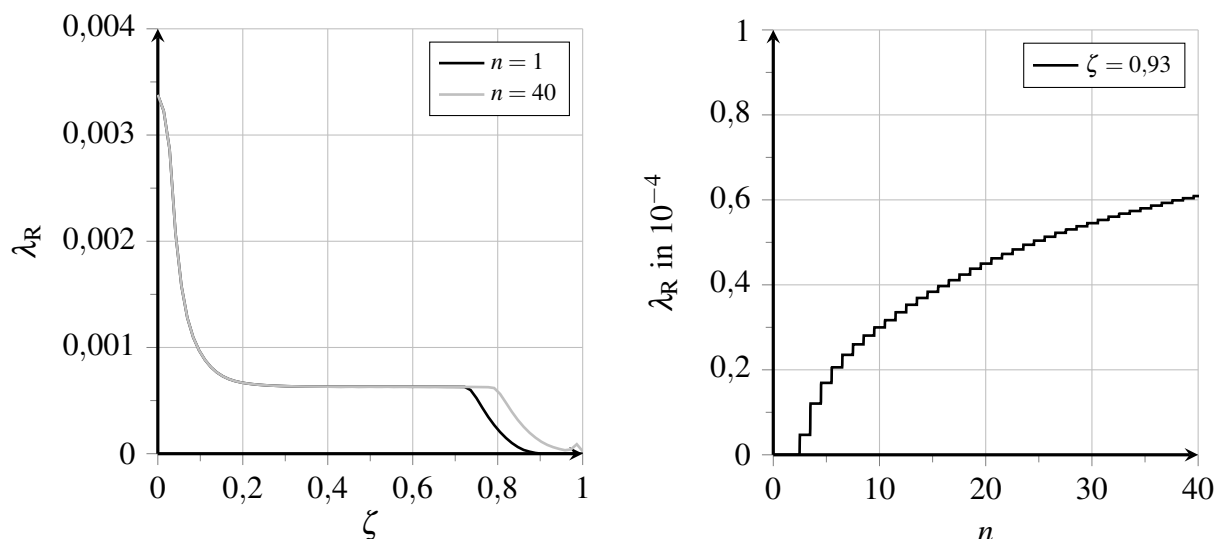


Abbildung 6.37: Plastischer Multiplikator im Zugbereich über die Verbundlänge im ersten Lastspiel und Entwicklung im Bereich des Faserendes über weitere Lastwechsel

Die numerische Untersuchung des Ermüdungsverhaltens eines teilweise verschieblichen Faser-Matrix-Verbundes zeigt die Ausbildung von drei Zonen mit unterschiedlicher Beanspruchung

und Verbundreaktion. Im Bereich des Faseraustrittsortes kommt es bei Be- und Entlastung der Faser zu signifikanten Relativverschiebungen parallel zur Kontaktebene, die einen hohen inelastischen Anteil aufweisen und so die Schädigung der Verbundzone induzieren. Mit zunehmender Verbundzonenschädigung werden die Verbundkapazität infolge von querdruckunabhängigen Verbundmechanismen sowie das Potenzial des querdruckerzeugenden Reibverbundes verringert. Gleichzeitig steigt infolge der verschiebungsinduzierten Aufweitung der Verbundzone zunehmend die Kontaktpressung an und verbessert durch die ausgeprägte Gleitreibung die Verbundwirkung. Die Extrapolation der wenigen berechneten Lastwechsel muss dabei nichtlinear erfolgen, wie Untersuchungen zum lokalen Materialverhalten der Verbundzone in Kapitel 4.3 zeigen. Dabei spielen Spannungsumlagerungen über die Verbundlänge eine entscheidende Rolle im Hinblick auf das Ermüdungsverhalten, wie die Entwicklung des Spannungs-Deformations-Zustandes in den übrigen Bereichen der Grenzschicht zeigt.

Der infolge der behinderten Entspannung der Faser verbleibende Eigenspannungszustand ist in der Mitte der Verbundlänge am stärksten ausgeprägt. Dabei werden überwiegend elastische Relativverschiebungen generiert, die nicht zu einem Schädigungswachstum in der Verbundzone und im umliegenden Beton beitragen. Die abnehmende Verbundwirkung im Bereich des Faseraustrittsortes erzwingt zur vollständigen Spannungsübertragung jedoch eine fortschreitende Kontaktzonenrissbildung in Richtung des Faserendes. In diesem Bereich nehmen Faserzugspannungen, Verschiebungen und Verbundspannungen daher immer weiter zu. Damit einhergehend vergrößert sich auch der Einflussbereich von inelastischen Relativverschiebungen im Bereich des Faseraustrittsortes, was mit einer Ausbreitung der Verbundzonenschädigung und einer Umlagerung der Verbundschubspannungen korreliert wie experimentell beobachtet, vgl. [Lin11]. Die vollständige Ablösung der Faser von der Matrix leitet schließlich das Versagen der Verbundzone ein, weil die Aufnahme der Beanspruchung bei zunehmender Verbundzonenschädigung nicht mehr gewährleistet werden kann. Die vorliegenden Ergebnisse geben Hinweise auf eine mögliche Stabilisierung der Verbundwirkung infolge einer ausgeprägten Querdruckentwicklung. Daher ist eine Prognose der Versagensgeschwindigkeit auf der Grundlage der vorliegenden Resultate nicht möglich. Denkbar sind sowohl ein plötzliches Ausreißen der Faser aus der Matrix als auch ein allmählicher Faserauszug infolge einer hohen Kontaktpressung in der Nähe des Faseraustrittsortes.

Die infolge der zyklischen Belastung des Faser-Matrix-Verbundes fortschreitende Kontaktzonenrissbildung stellt den maßgebenden Treiber der Verbundermüdung dar, da sie die unwiederbringliche Herabsetzung des Verbundwiderstandes einleitet. Ausgelöst wird sie durch inelastische Relativverschiebungen und das damit verbundene Schädigungswachstum im bereits abgelösten Bereich der Verbundzone nahe dem Faseraustrittsort. Im Rahmen dieser numerischen Analyse erfolgt keine Betrachtung von Ermüdungsphänomenen der Materialstrukturen Stahl und UHPC. Dennoch ist von einer zusätzlichen Beeinträchtigung des Faser-Matrix-Verbundes durch Ermüdungsschädigungen der Komponenten auszugehen. Das entwickelte Verbundmodell sieht keine Verstärkung des Schädigungswachstums infolge von Querdruck in der Verbundzone vor, vgl. Kapitel 4.2. Dabei besteht aber im Modell eine Wechselwirkung zwischen einer Kontaktpressung und dem Verbundwiderstand, der wiederum die Größe der inelastischen Relativverschiebungen reguliert. Demnach kann ein erhöhter Querdruck in der Verbundzone die Verbundermüdung bremsen. Während das Auftreten hoher äußerlicher Querdruckspannungen in einem zugbeanspruchten Querschnitt unwahrscheinlich ist, kann eine verstärkte verschiebungsinduzierte Querdruckentwicklung beim Faserauszug den Ermüdungswiderstand der Verbundzone signifikant vergrößern, da die Kontaktzonenrissbildung verzögert und inelastische Relativverschiebungen nach Ablösung

der Kontaktoberflächen voneinander vermindert werden. Dafür ist eine hohe Verbundqualität erforderlich, vgl. Kapitel 3.4.

Die Verbundermüdung beeinträchtigt insbesondere die Tragfähigkeit von gerissenem UHPFRC, da erst mit der partiellen Ablösung der Faser von der Matrix schädigende Relativverschiebungen zwischen den Kontaktflächen auftreten. Dieser Zustand des Faser-Matrix-Verbundes kann durch äußere Belastung, Temperaturbeanspruchungen oder Feuchtigkeitseinflüsse generiert werden. Darüber hinaus können auch Imperfektionen und Fehlstellen in der Verbundzone die Kontaktzonenrissbildung initiieren und so die Ermüdung der Verbundzone beschleunigen. Der Einfluss von ermüdungsbedingten Gefügeveränderungen in der Matrix ist daher ebenfalls von Bedeutung. Eine abschließende Beurteilung der Ermüdung von faserbewehrtem UHPC ist auf der Grundlage dieser numerischen Untersuchung zur Verbundermüdung nicht möglich.

### 6.3.2 Leistungsfähigkeit der Faserverstärkung in UHPFRC

Die numerische Analyse des Faser-Matrix-Verbundes mit dem entwickelten Verbundmodell zeigt die inhomogene Spannungsverteilung im Verbundwerkstoff bei einaxialer Zugbeanspruchung. Durch die dehnungsbehindernde Wirkung der eingeschlossenen Fasern entstehen lokale Spannungsumlagerungen, vgl. Kapitel 6.1. Die Untersuchung der Fasertragwirkung in ungerissenem UHPFRC weist auf die Entstehung von Rissprozesszonen im Bereich der Faserenden hin, die unter Umständen unerwünschte Risspfade von Faserende zu Faserende begünstigen und die Bruchlastspielzahl herabsetzen [Hee17]. Da Vorschädigungen und die Ermüdung der Verbundzone im gerissenen Zustand für das Tragverhalten des Verbundwerkstoffes als kritisch zu bewerten sind, empfiehlt GREINER die Auslegung für einen ungerissenen Gebrauchszustand [Gre06]. Auch die Verwendung von Mikrofasern bewirkt, dass sichtbare, mit rissüberbrückenden Fasern vernähte Makrorisse vermieden werden. Da insbesondere der Lastabtrag bei Biegezugbeanspruchungen eine Rissbildung voraussetzt, ist die Kombination von Faserbewehrung mit konventioneller Bewehrung zu bevorzugen.

Das rissüberbrückende Tragverhalten von Mikrostaahlfasern kann mithilfe numerischer Simulationen von Faserauszugversuchen untersucht und hinsichtlich der Faserwirksamkeit evaluiert werden, vgl. Kapitel 6.2. Für Rückschlüsse auf die Tragfähigkeit von Faserbeton müssen darüber hinaus auch Einflüsse der üblicherweise inhomogenen Faserverteilung sowie der Faserorientierung einbezogen werden. Die Bezeichnung Faserwirksamkeit meint dabei die maximal übertragbare Faserbetonzugspannung bei kraftschlüssiger Verbindung der Rissufer durch Fasern, mit der der bemessungsrelevante Beitrag der Faserzugabe zur Tragfähigkeit erfasst wird, vgl. Kapitel 2.4. Mithilfe von Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen wird die Faserwirksamkeit zur maßgebenden Kenngröße für die Bemessung im Grenzzustand der Tragfähigkeit, vgl. Kapitel 2.3. Die Analogie zwischen Last-Verschiebungs-Diagrammen aus Einzelfaserauszugversuchen und Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen verdeutlicht die Bedeutung des Auszugverhaltens zur Charakterisierung der Fasertragwirkung.

Im Rahmen dieser Arbeit wird das Auszugverhalten auf Basis der Verbundwirkung analysiert. Die numerischen Untersuchungen an verschiedenen Konfigurationen von Einzelfaserauszugversuchen zeigen, dass der maximale Auszugwiderstand bei üblichen Faserlängen und einer guten Verbundqualität erst erreicht wird, wenn die Ablösung der Faser von der Matrix vollendet wird. Dabei verläuft das Debonding insgesamt stabil, bis es zu einem ruckartigen Abfall des Auszugwiderstandes und Nachrutschen der Faser kommt, vgl. [KBM91]. Die maximale Fasertragwirkung

wird also erst mit beginnender Mikrorissöffnung im Gefüge generiert. Voraussetzung dafür ist, dass der starre Verbund zwischen Faser und Matrix nicht stellenweise oder vollständig durch Vorschädigungen z. B. infolge von Schwind- oder Kriechverformungen, Temperatureinwirkungen oder Ermüdungserscheinungen vorzeitig aufgelöst worden ist.

In seiner Definition einer Faserleistungskennzahl  $FLK_f$  bezieht STENGEL die maximale Auszugskraft auf das Volumen der Faser, um den ökonomischen Aufwand der durch Faserzugabe verbesserten Leistungsfähigkeit mit einzubeziehen [Ste13]. Mithilfe von Effektivitätsfaktoren werden die unterschiedlichen Einbindelängen benachbarter Fasern bei der Überbrückung eines Risses sowie der Einfluss der Faserorientierung berücksichtigt. Die Auswertung der Bestimmungsgleichung (2.19) für die in Kapitel 6.2 untersuchten Konfigurationen bescheinigt der Variante MU1 mit einer vergleichsweise schlanken, sehr dünnen Faser die höchste Leistungsfähigkeit. Die große Bedeutung des Faservolumens in der Definition der Faserleistungskennzahl führt dazu, dass Variante BSk mit der weniger schlanken Faser die zweitgrößte Leistungsfähigkeit aufweist, wobei nur ein geringer Unterschied zur Konfiguration BS ergibt. Nicht berücksichtigt ist allerdings in dieser Bewertung das Dehnungsvermögen der Fasern und damit die Rissöffnung bei Erreichen der Faserwirksamkeit. Im Hinblick auf die Gebrauchstauglichkeit von faserbewehrten Bauteilen ist jedoch die mögliche überbrückte Rissweite für die Auslegung des Faserbetons wesentlich, vgl. Kapitel 6.2. Der gerissene Zustand und die Kompatibilität der überbrückbaren und erzwungenen Rissöffnungen ist insbesondere bei der Anwendung einer kombinierten Faser- und Stabstahlbewehrung von Bedeutung.

Im Bezug auf die Faserwirksamkeit ist die Optimierung des maximalen Auszugswiderstandes von Interesse. Um den Abschluss des fortschreitenden Debondings zu verzögern, ist die Verwendung langer Fasern sinnvoll. Dabei ist neben der Verarbeitbarkeit auch die Unterschreitung der Grenzschlankheit  $\lambda_{f,krit}$  nach Gleichung (2.17) zu beachten, bei der anstelle des sukzessiven Herausziehens vermehrt ein Faserreißen auftritt. Darüber hinaus nimmt der Auszugswiderstand nicht proportional zur Faserlänge zu, da die Verteilung des Verbundwiderstandes entlang der abgelösten Faser aufgrund der Verbundzonenschädigung und Degradation nichtlinear ist, vgl. Kapitel 6.2. Entsprechend der Modellannahme einer Abhängigkeit der Schädigungsentwicklung in der Grenzschicht vom Faserdurchmesser wären dünne Fasern ebenfalls weniger geeignet zur langfristigen Sicherstellung der Kraftübertragung über einen Riss. Die Auswertung des experimentell ermittelten Lastabfalles nach dem Erreichen der maximalen Auszugskraft kann Hinweise bezüglich der Gültigkeit dieser Modellannahme liefern.

Zur Vergrößerung des maximalen Auszugswiderstandes sind die maßgebenden Verbundmechanismen Adhäsion und Mikroverzahnung beispielsweise durch die Verbesserung der Partikelpackung oder eine Zugabe adhäsiver Wirkstoffe zu optimieren, vgl. [Ste13], [Naa00]. Im Rahmen des entwickelten Verbundmodells ist die lokale Ablösung der Kontaktoberflächen voneinander mit geringfügigen Relativverschiebungen verbunden, sodass der Verbundspannungsabfall entschleunigt erfolgt, vgl. Kapitel 4.2. In Abhängigkeit dieser Relativverschiebung ist auch der Verbundwiderstand im verschieblichen Verbund für die Optimierung der Faserwirksamkeit von Bedeutung, da die Verbundwirkung im Bereich des Faseraustrittsortes bei Vollendung der Ablösung bereits reduziert ist. Darüber hinaus können die querdruckinduzierte Haft- und Gleitreibung den Verbundwiderstand erhöhen. Vor allem geometrisch vorgeformte und schiefwinkelig herausgezogene Fasern weisen in experimentellen Untersuchungen einen höheren maximalen Auszugswiderstand auf, vgl. z. B. [Ste13]. Die lokale Maximierung des Verbundwiderstandes durch den Kontakt einer unebenen Faseroberfläche mit dem Faserkanal kann aber auch ein vorzeitiges Faserreißen bewirken.

Die irreversible Degradation der Verbundzone nach Ablösung führt dazu, dass die Kraftübertragung im Beton bei Rissbildung nicht dauerhaft durch die Fasertragwirkung ersetzt werden kann. Da mit der beginnenden Mehrfachrissbildung das Materialversagen eingeleitet wird, ist eine Optimierung des Verbundwiderstandes bei großen Relativverschiebungen nicht von Bedeutung. Im Hinblick auf die Verbundermüdung kann der nach der Ablösung verbleibende, abnehmende Verbundwiderstand weiteren Relativverschiebungen entgegenwirken, Spannungsumlagerungen entschleunigen und so bewirken, dass eine größere Lastspielzahl ertragen werden kann. Die rissüberbrückende Faserwirkung dämpft das spröde Matrixversagen durch die Unterbrechung von Trennrissen, vgl. Kapitel 2.1. Das duktilere Nachbruchverhalten stellt eine verbesserte Robustheit faserbewehrter Bauteile gegenüber unbewehrten Bauteilen sicher.

Die Auswertung von Faserauszugversuchen liefert eine Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung, mit der die Kalibrierung des entwickelten Verbundmodells für die Faserauszugphase möglich ist. Dahingegen können die Modellparameter für den starren Verbund nicht eindeutig bestimmt werden, da nicht von einer gleichförmigen Verteilung der Verbundspannungen über die Verbundlänge ausgegangen werden kann. Auf der sicheren Seite ist demnach eine Bestimmung der Faserwirksamkeit auf Basis der messbaren Verbundwirkung im verschieblichen Verbund. Darüber hinaus ist ein Bemessungskonzept mit ausreichendem Sicherheitszuschlag erforderlich, das die Inhomogenität des Verbundwerkstoffes und die nicht durch eine zunehmende Rissöffnung und herausgezogene Fasern erkennbare Schädigung oder Ermüdung der Verbundzone berücksichtigt.



## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Für eine wirtschaftliche baupraktische Anwendung des Verbundwerkstoffes UHPFRC ist die Erfassung der Fasertragwirkung in der Bauteilbemessung essenziell. In dieser Arbeit erfolgt dafür die Charakterisierung und Modellierung der Tragwirkung einer rissüberbrückenden Mikrostaalfaser im Nachrissbereich des Zugtragverhaltens von UHPFRC. Wesentliche Einflüsse auf die Größe und den Verlauf des Verbundverhaltens zwischen der glatten Oberfläche einer Mikrostaalfaser und feinkörnigem, ultrahochfesten Beton werden grundsätzlich beschrieben und analysiert. Mithilfe von dreidimensionalen numerischen Untersuchungen des Faser-Matrix-Verbundes mit der FEM wird der Zusammenhang zwischen der lokalen Verbundwirkung und dem integralen Auszugverhalten einer Einzelfaser aus der Matrix ausgewertet, um die Übertragung der Erkenntnisse auf das Tragverhalten des Verbundwerkstoffes UHPFRC zu ermöglichen. Im Folgenden wird ein Überblick über die erzielten Forschungsergebnisse sowie offene Fragestellungen für zukünftige Untersuchungen der Fasertragwirkung gegeben.

### 7.1 Zusammenfassung

Die Mikrostruktur der Grenzschicht zwischen normalfestem Zementstein und Zuschlägen ist vielfach experimentell untersucht und charakterisiert worden. Obwohl mit der Festigkeit der Matrix bei ultrahochfestem Beton auch die Verbundzone verbessert wird, sind die strukturellen und mikrophysikalischen Eigenschaften der ITZ zwischen Fasern und UHPC bislang nicht identifiziert, vgl. Kapitel 2. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher das Verbundverhalten zwischen der glatten Staalfaseroberfläche und der feinkörnigen UHPC-Matrix unter Berücksichtigung der Verbundphasen mit starrem und verschieblichem Verbund und anhand der maßgebend beteiligten Verbundmechanismen charakterisiert und modelliert, vgl. Kapitel 3. Das phänomenologisch motivierte Verbundverhalten berücksichtigt mithilfe unterschiedlicher Modellparameter wesentliche Einflüsse auf die Verbundqualität sowie die erwartete schädigungsinduzierte Degradation der Verbundkapazität. Des Weiteren unterscheidet das entwickelte Materialmodell für die Verbundzone die Einwirkung von Querdruck und Querkzug, vgl. Kapitel 4. Die allgemeingültige Formulierung der Materialgleichungen ermöglicht bei einer entsprechenden Wahl der Modellparameter die Anwendung des Materialmodells für beliebige Verbundprobleme zwischen makroskopisch glatten, nicht durch chemische Bindungen interagierenden Kontaktoberflächen. Für die Beschreibung der Verbundwirkung zwischen profilierten Oberflächen ist die Grenzschicht als aus glatten Teiloberflächen zusammengesetzte Verbundebene aufzulösen.

In Verbindung mit ebenen Verbundzonenelementen und einem entwickelten Algorithmus zur Kontaktfeststellung und Knotenzuordnung beschreibt das Verbundmodell die Verbundwirkung zwischen gegeneinander verschieblichen Elementgruppen mit beliebig gekrümmter Oberfläche, vgl. Kapitel 5. Die Kombination von physikalischer und geometrischer Nichtlinearität erfordert zwar eine feine zeitliche und räumliche Diskretisierung mit der Finite-Elemente-Methode, erlaubt aber die numerische Simulation von Faserauszugversuchen. Das Auszugverhalten einer Einzelfaser, die weggeregelt aus der UHPC-Matrix herausgezogen wird, repräsentiert als Ausschnitt aus einem Riss mit rissüberbrückender Faser die Zugtragwirkung von faserbewehrtem, ultrahochfesten Beton. Mit der Auswertung von Größe und Verlauf der Tragwirkung einer rissüberbrückenden Faser kann unter Berücksichtigung der Faserverteilung und -ausrichtung die Wirksamkeit einer Faserbewehrung in UHPC abgeleitet und für zukünftige Bemessungskonzepte herangezogen werden, vgl. Kapitel 6.



Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Untersuchungen des Faser-Matrix-Verbundes belegen die Eignung des entwickelten Verbundmodells für diese Anwendung. Die damit abgebildete Fasertragwirkung vor Beginn des Debondings entspricht den theoretischen Überlegungen zum Faserauszugproblem. Die Ablösung der Faser von der Matrix erfolgt zunächst am Faseraustrittsort und schreitet bei zunehmender Relativverschiebung zum eingebetteten Faserende hin fort. Die Untersuchungen zeigen, dass die Verbundmechanismen Adhäsion und Mikroverzahnung im quasi-starren Verbund, die experimentell nur mit Kenntnis der Verbundspannungsverteilung über die Fasereinbindelänge quantifizierbar sind, den maximalen Auszugwiderstand entscheidend beeinflussen. Mit der Ablösung setzen eine Schädigung und Degradation der Verbundkapazität ein, die insbesondere bei langen Fasern deutliche Auswirkungen auf den Auszugwiderstand haben. Das entwickelte Verbundmodell ermöglicht die Auswertung der nichtlinearen Verbundspannungsverteilung entlang der Verbundlänge und die Erfassung des Schädigungszustandes an jeder Stelle der Grenzschicht. Weitere numerische Untersuchungen zur Entwicklung der Verbundwirkung entlang der Verbundlänge sowie zu spezifischen Einflussfaktoren geben Hinweise hinsichtlich der Optimierung der Fasertragwirkung. Dabei ist das entwickelte Verbundmodell ein vielseitig einsetzbares, effizientes und hilfreiches Tool.

Obwohl das modellierte Verbundverhalten auch eine Reihe von Modellannahmen beinhaltet, bestätigt die numerische Simulation eines Faserauszugversuches unter zyklischer Beanspruchung das hypothetische Ermüdungsverhalten der Verbundzone, das maßgeblich durch das fortschreitende Debonding bestimmt ist. Bei einem partiellen Ablösungszustand der Verbundzone wird bereits über wenige Lastwechsel die weitere Kontaktzonenrissbildung durch eine zunehmende Schädigung des abgelösten Bereiches induziert. Die numerische Analyse zeigt außerdem den Eigenspannungszustand der Faser, die aufgrund des hohen Verbundwiderstandes in ihrer Dehnung und Entspannung behindert wird, vgl. Kapitel 6.3. Daraus können wertvolle Hinweise zum Ermüdungstragverhalten von faserbewehrtem UHPC abgeleitet werden. Damit verdeutlicht diese Anwendung des entwickelten Verbundmodells auch den Nutzen detaillierter numerischer Untersuchungen auf der Mesoskala für das Verständnis des makroskopischen Tragverhaltens des Faserverbundwerkstoffes.

## 7.2 Ausblick

Die numerischen Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit weisen auf Schwachstellen des entwickelten Verbundmodells im Umgang mit Singularitäten hin. Insbesondere durch eine Modifikation der Querdruckentwicklung an Umlenkstellen bei vorgeformten Fasergeometrien ist eine Vergrößerung des Anwendungsbereiches möglich. Dringender Bedarf an detaillierten numerischen Untersuchungen besteht etwa für spezielle Fasergeometrien sowie eng nebeneinanderliegende oder kreuzende Fasern mit gegenseitiger Beeinträchtigung der lokalen Verbundwirkung. Darüber hinaus ermöglicht eine Verbesserung und Erweiterung des Knotenzuordnungsalgorithmus auch die Verwendung anderer Elementgeometrien, wie beispielsweise Tetraeder-Elemente, für die Strukturen und Dreieck-Elemente für die Verbundzone und Ansatzfunktionen und erhöht damit die Vielseitigkeit des Elementkonzeptes.

Das Materialmodell zur Beschreibung des Verbundverhaltens ist allgemeingültig formuliert und mithilfe verschiedener Erweiterungsmöglichkeiten auf andere Verbundprobleme übertragbar. Beispielsweise kann die Anisotropie einer Grenzschicht durch die Definition einer richtungsabhängigen Verbundsteifigkeit sowie die Festlegung einer Vorzugsrichtung für die Begrenzung der

Verbundspannungen mithilfe von erweiterten Versagensbedingungen modelliert werden. Darüber hinaus ist auch eine schädigungsabhängige Formulierung von anisotropem Verbundverhalten denkbar.

Das entwickelte Verbundmodell ist vor allem für spezifische Untersuchungen des Verbund- und Auszugverhaltens glatter Fasern aus einer nahezu homogenen Matrix prädestiniert. Dabei erfordert die passende Kalibrierung der Modellparameter eingehende experimentelle Untersuchungen der Verbundzone sowie des Auszugverhaltens mit der Variation wesentlicher Einflussfaktoren. Mithilfe von numerischen Untersuchungen ist eine genaue Erfassung der Faserwirksamkeit für ein sicheres Bemessungskonzept möglich, das auf der Basis der mikrophysikalischen Verbundwirkung anstelle von empirischen Angaben zur integralen Auszugwirkung differenziert entwickelt werden kann. Ein verbessertes Verständnis der Fasertragwirkung vereinfacht somit die herausfordernde Abwägung zwischen Ressourceneffizienz, Nachhaltigkeit, Wirtschaftlichkeit und Sicherheit bei der Auslegung und Bemessung von und mit faserverstärktem Beton.

Für die Modellierung von Bauteilen aus UHPFRC ist anstelle der aufwendigen diskreten Erfassung einzelner mikrorissüberbrückender Fasern eine effiziente Homogenisierungsstrategie erforderlich, die die Fasertragwirkung vereinfacht und unter Berücksichtigung der Faserverteilung und -orientierung erfasst. Da das Interesse bei Bauteil-Simulationen vorrangig dem Versagen durch die Bildung von Makrorissen gilt, erfolgt auch ein Wechsel der Beschreibungsskala. Darüber hinaus stellt das entwickelte Verbundmodell eine zentrale Ebene in einem Mehrskalenmodell zur Beschreibung des komplexen Tragverhaltens von Faserverbundwerkstoffen dar. Insbesondere im Hinblick auf Untersuchungen des Ermüdungsverhaltens im Bereich von High-Cycle-Fatigue sind effiziente Modellierungsansätze mit möglichst hoher Genauigkeit gefragt. Das Verbundmodell dient dabei auch zur Ableitung einer vereinfachten, realitätsnahen Beschreibung des Faser-Matrix-Verbundes.



# Literaturverzeichnis

- [AFG13] AFGC – ASSOCIATION FRANÇAISE DE GÉNIE CIVIL: *Documents scientifiques et techniques: Bétons fibres à ultra-hautes performances – Recommandations*. 2013
- [AS06] ALFANO, G. ; SACCO, E.: Combining interface damage and friction in a cohesive-zone model. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 68 (2006), Nr. 5, S. 542–582
- [Alv98] ALVAREZ, M.: *Einfluss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton*, Institut für Baustatik und Konstruktion, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Bericht, Zugl. Diss., 1998
- [Aue14] AUER, M.: *Ein Verbundmodell für Stahlbeton unter Berücksichtigung der Betonschädigung*, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Karlsruher Institut für Technologie, Diss., 2014
- [ACK71] AVESTON, J. ; COOPER, G. A. ; KELLY, A.: Single and multiple fracture. In: NATIONAL PHYSICAL LABORATORY (Hrsg.): *The properties of fibre composites. Conference proceedings*. Guildford, Great Britain : IPC Science and Technology Press, 1971, S. 15–24
- [AD17] AHRENS, H.; DINKLER, D.: *Finite-Elemente-Methoden: Teil I*, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, Lehrmanuskript, 2017
- [AK73] AVESTON, J. ; KELLY, A.: Theory of multiple fracture of fibrous composites. In: *Journal of Materials Science* 8 (1973), Nr. 3, S. 352–362
- [Bar81] BARTOS, P.: Review paper: Bond in fibre reinforced cements and concretes. In: *International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete* 3 (1981), Nr. 3, S. 159–177
- [Bat02] BATHE, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden: Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen. Deutsche Übersetzung von Peter Zimmermann*. 2., vollst. neu bearb. und erw. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo : Springer-Verlag, 2002
- [Bäu02] BÄUML, M. F.: *Steigerung der Dauerhaftigkeit selbstverdichtender Betone durch den Einsatz von Polymerfaserkurzschnitt*, Institut für Baustoffe, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Diss., 2002
- [Bay20] BAYAT, H. R.: *Versagensmodellierung von Schnittstellen und Metallblechen*, Institut für Angewandte Mechanik, RWTH Aachen University, Diss., 2020
- [Bec09] BECKMANN, M. B.: *Ein gradientenabhängiges Modell für anisotrope Schädigung von Beton unter Berücksichtigung von Porendruck*, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2009
- [BDM85] BENTUR, A. ; DIAMOND, S. ; MINDESS, S.: The microstructure of the steel fibre-cement interface. In: *Journal of Materials Science* 20 (1985), Nr. 10, S. 3610–3620
- [BFW10] BERGMEISTER, K. (Hrsg.) ; FINGERLOOS, F. (Hrsg.) ; WÖRNER, J.-D. (Hrsg.): *Beton-Kalender 2010: Brücken, Betonbau im Wasser*. 99. Jahrgang. Berlin : Ernst & Sohn, 2010
- [BFW11] BERGMEISTER, K. (Hrsg.) ; FINGERLOOS, F. (Hrsg.) ; WÖRNER, J.-D. (Hrsg.): *Beton-Kalender 2011: Kraftwerke, Faserbeton*. 100. Jahrgang. Berlin : Ernst & Sohn, 2011

- [BFW17] BERGMEISTER, K. (Hrsg.) ; FINGERLOOS, F. (Hrsg.) ; WÖRNER, J.-D. (Hrsg.): *Beton-Kalender 2017: Spannbeton, Spezialbetone*. 106. Jahrgang. Berlin : Ernst & Sohn, 2017
- [BG79] BOWLING, J. ; GROVES, G. W.: The debonding and pull-out of ductile wires from a brittle matrix. In: *Journal of Materials Science* 14 (1979), Nr. 2, S. 431–442
- [BS14] BREITENBÜCHER, R. ; SONG, F.: Experimentelle Untersuchungen zum Auszugsverhalten von Stahlfasern in höherfesten Betonen. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 109 (2014), Nr. 1, S. 43–52
- [BEH95] BUDIANSKY, B. ; EVANS, A. G. ; HUTCHINSON, J. W.: Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 32 (1995), Nr. 3/4, S. 315–328
- [BHE86] BUDIANSKY, B. ; HUTCHINSON, J. W. ; EVANS, A. G.: Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 34 (1986), Nr. 2, S. 167–189
- [CDR<sup>+</sup>15] CERFONTAINE, B. ; DIEUDONNÉ, A. C. ; RADU, J. P. ; COLLIN, F. ; CHARLIER, R.: 3D zero-thickness coupled interface finite element: Formulation and application. In: *Computers and Geotechnics* 69 (2015), S. 124–140
- [CY15] CHEN, Z. ; YAN, W.: A shear-lag model with a cohesive fibre-matrix interface for analysis of fibre pull-out. In: *Mechanics of Materials* 91 (2015), S. 119–135
- [Cox52] COX, H. L.: The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. In: *British Journal of Applied Physics* 3 (1952), S. 72–79
- [CH98] COX, J. V. ; HERRMANN, L. R.: Development of plasticity bond model for steel reinforcement. In: *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* 3 (1998), S. 155–180
- [CH99] COX, J. V. ; HERRMANN, L. R.: Validation of a plasticity bond model for steel reinforcement. In: *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials* 4 (1999), S. 361–389
- [Cra16] CRAMER, F.: *Mehrfeld-Modell für chemisch-physikalische Alterungsprozesse von Beton*, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2016
- [CBSC08] CUNHA, V. M. C. F. ; BARROS, J. A. O. ; SENA-CRUZ, J. M.: Bond-Slip Mechanisms of Hooked-End Steel Fibers in Self-Compacting Concrete. In: *Materials Science Forum* 587–588 (2008), S. 877–881
- [CS07a] CURBACH, M. ; SPECK, K.: *Versuchstechnische Ermittlung und mathematische Beschreibung der mehraxialen Festigkeit von Ultra-Hochfestem Beton (UHPC): Zweiaxiale Druckfestigkeit*, Institut für Massivbau, Technische Universität Dresden, Arbeitsbericht, 2007
- [CS07b] CURBACH, M. ; SPECK, K.: Zweiaxiale Druckfestigkeit von ultrahochfestem Beton. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 102 (2007), Nr. 10, S. 664–673
- [DAf12] DAFSTB – DEUTSCHER AUSSCHUSS FÜR STAHLBETON E. V.: *DAfStb-Richtlinie Stahlfaserbeton*. Berlin : Beuth Verlag GmbH, 2012
- [DAf08] DAFSTB – DEUTSCHER AUSSCHUSS FÜR STAHLBETON E. V.: *Sachstandsbericht Ultrahochfester Beton*. Berlin, Wien, Zürich : Beuth Verlag GmbH, 2008 (Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 561)
- [DP94] DAY, R. A. ; POTTS, D. M.: Zero thickness interface elements – numerical stability and application. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 18 (1994), Nr. 10, S. 689–708

- [DTS19] DEUTSCHER, M. ; TRAN, N. L. ; SCHEERER, S.: Experimental Investigations on the Temperature Increase of Ultra-High Performance Concrete under Fatigue Loading. In: *Applied Sciences* 9 (2019), Nr. 4087, S. 1–17
- [DIN11] DIN – DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG E.V.: *Eurocode 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken – Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; Deutsche Fassung EN 1992-1-1:2004 + AC:2010*. Berlin : Beuth Verlag GmbH, 2011
- [Din19] DINKLER, D.: *Grundlagen der Baustatik: Modelle und Berechnungsmethoden für ebene Stabtragwerke*. 5. Aufl. Wiesbaden : Springer Vieweg, 2019
- [DK98] DINKLER, D. (Hrsg.) ; KOWALSKY, U. (Hrsg.): *Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens*. Braunschweig : Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 1998
- [DCD13] DI PRISCO, M. ; COLOMBO, M. ; DOZIO, D.: Fibre-reinforced concrete in fib Model Code 2010: principles, models and test validation. In: *Structural Concrete* 14 (2013), Nr. 4, S. 342–361
- [Dro04] DROLL, K.: Influence of additions on ultra high performance concretes – grain size optimisation. In: SCHMIDT, M. (Hrsg.) ; FEHLING, E. (Hrsg.) ; GEISENHANSLÜKE, C. (Hrsg.): *Ultra High Performance Concrete (UHPC). Proceedings of the International Symposium on Ultra High Performance Concrete*. Kassel, Germany : kassel university press, 2004 (Schriftenreihe Baustoffe und Massivbau Heft 3), S. 285–301
- [DP52] DRUCKER, D. C. ; PRAGER, W.: Soil Mechanics And Plastic Analysis Or Limit Design. In: *Quarterly of Applied Mathematics* 10 (1952), Nr. 2, S. 157–165
- [EY78] EDWARDS, A. D. ; YANNOPOULOS, P. J.: Local bond-stress–slip relationships under repeated loading. In: *Magazine of Concrete Research* 30 (1978), Nr. 103, S. 62–72
- [EPB83] ELIGEHAUSEN, R. ; POPOV, E. P. ; BERTERO, V. V.: *Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations*. Berkeley, California, USA, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Report to the National Science Foundation, 1983
- [EOL<sup>+</sup>20] EMPELMANN, M. ; OETTEL, V. ; LANWER, J.-P. ; DINKLER, D. ; KOWALSKY, U. ; HÖPER, S.: Cyclic deterioration of bond zone between fibres and UHPC. In: MIDDENDORF, B. (Hrsg.) ; FEHLING, E. (Hrsg.) ; WETZEL, A. (Hrsg.): *Ultra-high performance concrete and high performance construction materials. Proceedings of 5th International Symposium on Ultra-High Performance Concrete and High Performance Construction Materials (Hi-PerMat)*. Kassel, Germany : kassel university press, 2020 (Schriftenreihe Baustoffe und Massivbau Heft 32), S. 141–142
- [FV07] FANTILLI, A. P. ; VALLINI, P.: A Cohesive Interface Model for the Pullout of Inclined Steel Fibers in Cementitious Matrixes. In: *Journal of Advanced Concrete Technology* 5 (2007), Nr. 2, S. 247–258
- [FL12] FEHLING, E. ; LEUTBECHER, T.: Ein Näherungsverfahren zur Bemessung von UHPC für Biegung und Längskraft. In: GEBBEKEN, N. (Hrsg.): *Festschrift zum 60. Geburtstag von Univ.-Prof. Dr.-Ing. Manfred Keuser*. Neubiberg : Universität der Bundeswehr München, 2012 (Berichte aus dem Konstruktiven Ingenieurbau 12/4), S. 103–110

- [FST<sup>+</sup>05] FEHLING, E. ; SCHMIDT, M. ; TEICHMANN, T. ; BUNJE, K. ; BORNEMANN, R. ; MIDDENDORF, B.: *Entwicklung, Dauerhaftigkeit und Berechnung Ultrahochfester Betone (UHPC)*, Fachbereich Bauingenieurwesen, Universität Kassel, Forschungsbericht, 2005
- [fib00] FIB – FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON: *Bond of reinforcement in concrete: State-of-art report*. Stuttgart : Sprint-Druck, 2000 (Bulletin 10)
- [fib93] FIB – FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON: *CEB-FIP model code 1990: Design code*. London : Telford, 1993
- [fib13] FIB – FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON: *Model Code for Concrete Structures 2010*. First Ed. Berlin : Ernst & Sohn, 2013
- [Fit12] FITIK, B.: *Ermüdungsverhalten von ultrahochfestem Beton (UHPC) bei zyklischen Beanspruchungen im Druck-Zug-Wechselbereich*, Institut für Baustoffe und Konstruktion, Lehrstuhl Massivbau, Technische Universität München, Diss., 2012
- [FQH<sup>+</sup>15] FLEISCHHAUER, R. ; QINAMI, A. ; HICKMANN, R. ; DIESTEL, O. ; GÖTZE, T. ; CHERIF, C. ; HEINRICH, G. ; KALISKE, M.: A thermomechanical interface description and its application to yarn pullout tests. In: *International Journal of Solids and Structures* 69–70 (2015), S. 531–543
- [Fre11] FRETTLÖHR, B.: *Bemessung von Bauteilen aus ultrahochfestem Faserfeinkornbeton (UHFFB)*, Institut für Leichtbau, Entwerfen und Konstruieren, Universität Stuttgart, Diss., 2011
- [FW16] FRIEDRICH, L. F. ; WANG, C.: Continuous Modeling Technique of Fiber Pullout from a Cement Matrix with Different Interface Mechanical Properties Using Finite Element Program. In: *Latin American Journal of Solids and Structures* 13 (2016), Nr. 10, S. 1937–1953
- [GG85] GAMBAROVA, P. G. ; GIURIANI, E.: Discussion of „Fracture Mechanics of Bond in Reinforced Concrete“ by Anthony R. Ingraffea, Walter H. Gerstle, Peter Gergely, and Victor Saouma (April, 1984). In: *Journal of Structural Engineering* 111 (1985), Nr. 5, S. 1161–1163
- [GL97] GENG, Y. P. ; LEUNG, C. K. Y.: Damage-Based Modeling of Fiber Pullout under Variable Compressive Stress. In: *Journal of Engineering Mechanics* 123 (1997), Nr. 4, S. 342–349
- [GTB68] GOODMAN, R. E. ; TAYLOR, R. L. ; BREKKE, T. L.: A Model for the Mechanics of Jointed Rock. In: *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 94 (1968), Nr. 3, S. 637–659
- [GS87] GOPALARATNAM, V. S. ; SHAH, S. P.: Tensile Failure of Steel Fiber-Reinforced Mortar. In: *Journal of Engineering Mechanics* 113 (1987), Nr. 5, S. 635–652
- [Gra84] GRAY, R. J.: Analysis of the effect of embedded fibre length on fibre debonding and pull-out from an elastic matrix: Part 1 – Review of theories. In: *Journal of Materials Science* 19 (1984), Nr. 3, S. 861–870
- [Gra83] GRAY, R. J.: Experimental techniques for measuring fibre/matrix interfacial bond shear strength. In: *International Journal of Adhesion and Adhesives* 3 (1983), Nr. 4, S. 197–202
- [Gre06] GREINER, S.: *Zum Tragverhalten von dünnen Bauteilen aus ultrahochfestem Faserfeinkornbeton*, Institut für Leichtbau, Entwerfen und Konstruieren, Universität Stuttgart, Diss., 2006

- [Gre69] GRESZCZUK, L. B.: Theoretical Studies of the Mechanics of the Fiber-Matrix Interface in Composites. In: *Interfaces in Composites*. West Conshohocken, Pennsylvania, USA : American Society for Testing & Materials, 1969, S. 42–58
- [Gri21] GRIFFITH, A. A.: The phenomena of rupture and flow in solids. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 221 (1921), S. 163–198
- [GS16] GROSS, D. ; SEELIG, T.: *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikromechanik*. 6. Aufl. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2016
- [GNG<sup>+</sup>20] GUDŽULIC, V. ; NEU, G. E. ; GEBUHR, G. ; ANDERS, S. ; MESCHKE, G.: Numerisches Mehrebenen-Modell für Stahlfaserbeton: Von der Faser- zur Bauteilebene. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 115 (2020), Nr. 2, S. 146–157
- [GN00] GUERRERO, P. ; NAAMAN, A. E.: Effect of Mortar Fineness and Adhesive Agents on Pullout Response of Steel Fibers. In: *ACI Materials Journal* (2000), Nr. 97-M2, S. 12–22
- [Har86] HARTWICH, K.: *Zum Riss- und Verformungsverhalten von stahlfaserverstärkten Stahlbetonstäben unter Längszug*. Braunschweig, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, Technische Universität Braunschweig, Diss., 1986
- [Has91a] HASHIN, Z.: Composite materials with viscoelastic interphase: creep and relaxation. In: *Mechanics of Materials* 11 (1991), Nr. 2, S. 135–148
- [Has90] HASHIN, Z.: Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface. In: *Mechanics of Materials* 8 (1990), Nr. 4, S. 333–348
- [Has91b] HASHIN, Z.: Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39 (1991), Nr. 6, S. 745–762
- [Hee17] HEEK, P.: *Modellbildung und numerische Analysen zur Ermüdung von Stahlfaserbeton*, Lehrstuhl für Massivbau, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 2017
- [HC94] HERRMANN, L. R. ; COX, J. V.: *Development of a Plasticity Bond Model For Reinforced Concrete: Preliminary Calibration and Cyclic Applications*. Port Hueneme, California, USA, Naval Facilities Engineering Service Center, Contract Report, 1994
- [Hoh04] HOHBERG, Ralph: *Zum Ermüdungsverhalten von Beton*, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM), Technische Universität Berlin, Diss., 2004
- [HKD<sup>+</sup>19] HÖPER, S. ; KOWALSKY, U. ; DINKLER, D. ; LANWER, J.-P. ; OETTEL, V. ; EMPELMANN, M.: Pull-out behaviour of smooth steel microfibres embedded in UHPC. In: ZINGONI, A. (Hrsg.): *Advances in Engineering Materials, Structures and Systems: Innovations, Mechanics and Applications. Proceedings of the 7th International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation (SEMC)*. Cape Town, South Africa : CRC Press, 2019, S. 1462–1467
- [Höw20] HÖWER, D.: *Numerical and experimental investigation of debonding accounting for severe fiber bridging*, Institut für Angewandte Mechanik, RWTH Aachen University, Diss., 2020
- [HF39] HOYER, E. ; FRIEDRICH, E.: Beitrag zur Frage der Haftspannung in Eisenbetonbauteilen. In: *Beton und Eisen* 38 (1939), Nr. 6, S. 107–110
- [Hsu88] HSUEH, C.-H.: Elastic load transfer from partially embedded axially loaded fibre to matrix. In: *Journal of Materials Science Letters* 7 (1988), Nr. 5, S. 497–500



- [Hsu90] HSUEH, C.-H.: Interfacial debonding and fiber pull-out stresses of fiber-reinforced composites. In: *Materials Science and Engineering A123* (1990), S. 1–11
- [HB91] HSUEH, C.-H. ; BECHER, P. F.: Some considerations of bridging stresses for fiber-reinforced ceramics. In: *Composites Engineering 1* (1991), Nr. 3, S. 129–143
- [Hub06] HUBER, F.: *Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Diss., 2006
- [HJ90] HUTCHINSON, J. W. ; JENSEN, H. M.: Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction. In: *Mechanics of Materials 9* (1990), Nr. 2, S. 139–163
- [IGGS85] INGRAFFEA, A. R. ; GERSTLE, W. H. ; GERGELY, P. ; SAOUMA, V.: Closure to „Fracture Mechanics of Bond in Reinforced Concrete“ by Anthony R. Ingrassia, Walter H. Gerstle, Peter Gergely, and Victor Saouma (April, 1984). In: *Journal of Structural Engineering 111* (1985), Nr. 5, S. 1163–1164
- [Juh11] JUHART, J.: *Adhäsion von UHPC an Stahl und Glas: Ein Beitrag zu Adhäsion und Haftfestigkeit von Hochleistungs- und Ultra-Hochleistungs-Feinkornbeton an Stahl und Glas unterschiedlicher Rauheit*, Institut für Materialprüfung und Baustofftechnologie, Technische Universität Graz, Diss., 2011
- [Jun06] JUNGWIRTH, J.: *Zum Tragverhalten von zugbeanspruchten Bauteilen aus Ultra-Hochleistungs-Faserbeton*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Diss., 2006
- [KKLB14] KANG, J. ; KIM, K. ; LIM, Y. M. ; BOLANDER, J. E.: Modeling of fiber-reinforced cement composites: Discrete representation of fiber pullout. In: *International Journal of Solids and Structures 51* (2014), S. 1970–1979
- [KK02] KESSLER-KRAMER, C.: *Zugtragverhalten von Beton unter Ermüdungsbeanspruchung*, Universität Fridericiana zu Karlsruhe, Diss., 2002
- [Keu84] KEUSER, M.: *Verbundmodelle für nichtlineare Finite-Element-Berechnungen von Stahlbetonkonstruktionen*. Düsseldorf, VDI Verl.: Fortschritt-Berichte VDI Reihe 4, Bd. 71, 1985, Zugl.: Darmstadt, Technische Hochschule, Diss., 1984
- [KM87] KEUSER, M. ; MEHLHORN, G.: Finite Element Models for Bond Problems. In: *Journal of Structural Engineering 113* (1987), Nr. 10, S. 2160–2173
- [KBM91] KIM, J.-K. ; BAILLIE, C. ; MAI, Y.-W.: Instability of interfacial debonding during fibre pull-out. In: *Scripta Metallurgica et Materialia 25* (1991), Nr. 2, S. 315–320
- [KHDB02] KÖNIG, G. (Hrsg.) ; HOLSCHMACHER, K. (Hrsg.) ; DEHN, F. (Hrsg.) ; BALÁZS, G. L. (Hrsg.): *Faserbeton: Innovationen im Bauwesen; Beiträge aus Praxis und Wissenschaft*. 1. Aufl. Berlin : Bauwerk-Verlag, 2002
- [KCE18] KRAHL, P. A. ; CARRAZEDO, R. ; EL DEBS, M. K.: Mechanical damage evolution in UHPFRC: Experimental and numerical investigation. In: *Engineering Structures 170* (2018), S. 63–77
- [KGC19] KRAHL, P. A. ; GIDRÃO, G. de Miranda S. ; CARRAZEDO, R.: Cyclic behavior of UHPFRC under compression. In: *Cement and Concrete Composites 104* (2019), Nr. 103363, S. 1–14
- [Kul96] KULLAA, J.: Analysis of elastic fibre bridging in the multiple cracked composite. In: *Journal of Materials Science 31* (1996), Nr. 1, S. 61–70

- [Kul98a] KULLAA, J.: *Constitutive Modelling of fibre-reinforced brittle materials*, VTT Building Technology, Technical Research Centre of Finland, Helsinki University of Technology, Diss., 1998
- [Kul94] KULLAA, J.: Constitutive modelling of fibre-reinforced concrete under uniaxial tensile loading. In: *Composites* 25 (1994), Nr. 10, S. 935–944
- [Kul98b] KULLAA, J.: Micromechanics of multiple cracking: Part I – Fibre analysis. In: *Journal of Materials Science* 33 (1998), Nr. 16, S. 4213–4224
- [Kul98c] KULLAA, J.: Micromechanics of multiple cracking: Part II – Statistical tensile behaviour. In: *Journal of Materials Science* 33 (1998), Nr. 16, S. 4225–4234
- [KZ73] KUPFER, H. ; ZELGER, C.: *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung UND Bau und Erprobung einer Versuchseinrichtung für zweiachsige Belastung*. Berlin, München, Düsseldorf : Wilhelm Ernst & Sohn, 1973 (Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 229)
- [Küt00] KÜTZING, L.: *Tragfähigkeitsermittlung stahlfaserverstärkter Betone*. 1. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 2000 (Forschung für die Praxis). – Zugl.: Leipzig, Universität Leipzig, Diss., 1999 u. d. T.: *Ein Beitrag zur Tragfähigkeitsermittlung stahlfaserverstärkter Betone unter besonderer Berücksichtigung bruchmechanischer Kenngrößen*
- [LOE<sup>+</sup>19] LANWER, J.-P. ; OETTEL, V. ; EMPELMANN, M. ; HÖPER, S. ; KOWALSKY, U. ; DINKLER, D.: Bond behavior of micro steel fibers embedded in ultra-high performance concrete subjected to monotonic and cyclic loading. In: *Structural Concrete* 20 (2019), Nr. 4, S. 1243–1253
- [Lap07] LAPPA, E. S.: *High Strength Fibre Reinforced Concrete: Static and fatigue behaviour in bending*, Technische Universität Delft, Diss., 2007
- [Läp11] LÄPPLE, V.: *Einführung in die Festigkeitslehre: Lehr- und Übungsbuch*. 3., verb. und erw. Aufl. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, 2011
- [LMA10] LARANJEIRA, F. ; MOLINS, C. ; AGUADO, A.: Predicting the pullout response of inclined hooked steel fibers. In: *Cement and Concrete Research* 40 (2010), Nr. 10, S. 1471–1487
- [Law72] LAWRENCE, P.: Some theoretical considerations of fibre pull-out from an elastic matrix. In: *Journal of Materials Science* 7 (1972), S. 1–6
- [Law82] LAWS, V.: Micromechanical aspects of the fibre-cement bond. In: *Composites* 13 (1982), Nr. 2, S. 145–151
- [LLN73] LAWS, V. ; LAWRENCE, P. ; NURSE, R. W.: Reinforcement of brittle matrices by glass fibres. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 6 (1973), Nr. 5, S. 523–537
- [LB04] LEE, M. K. ; BARR, B. I. G.: An overview of the fatigue behaviour of plain and fibre reinforced concrete. In: *Cement and Concrete Composites* 26 (2004), Nr. 4, S. 299–305
- [Leh18] LEHMBERG, S.: *Herstellung und Eigenschaften von dünnwandigen, trocken gefügten Bauteilen aus ultrahochfestem faserverstärktem Feinkornbeton*, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, Technische Universität Braunschweig, Diss., 2018
- [LM77] LEONHARDT, F. ; MÖNNING, E.: *Vorlesungen über Massivbau: Dritter Teil Grundlagen zum Bewehren im Stahlbetonbau*. Dritte Aufl. Berlin, Heidelberg, New-York : Springer-Verlag, 1977

- [Ler96] LEROY, F.-H.: On analytical approaches to the three-dimensional stress state in a single fibre pull-out specimen. In: *Journal of Materials Science Letters* 15 (1996), Nr. 22, S. 1945–1948
- [Let06] LETTOW, S.: *Ein Verbundelement für nichtlineare Finite Elemente Analysen – Anwendung auf Übergreifungsstöße*, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, Diss., 2006
- [LG95] LEUNG, C. K. Y. ; GENG, Y. P.: Effect of lateral stresses on fiber debonding/pull-out. In: *Composites Engineering* 5 (1995), Nr. 10–11, S. 1331–1348
- [LG98] LEUNG, C. K. Y. ; GENG, Y. P.: Micromechanical modeling of softening behavior in steel fiber reinforced cementitious composites. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), Nr. 31–32, S. 4205–4222
- [Leu07] LEUTBECHER, T.: *Rissbildung und Zugtragverhalten von mit Stabstahl und Fasern bewehrtem Ultrahochfesten Beton (UHPC)*, Fachgebiet Massivbau, Universität Kassel, Diss., 2007
- [LF09] LEUTBECHER, T. ; FEHLING, E.: Rissbildung und Zugtragverhalten von mit Fasern verstärktem Stahlbeton am Beispiel ultrahochfesten Betons: Teil 1: Rissmechanische Zusammenhänge. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 104 (2009), Nr. 6, S. 357–367
- [LH93] LIANG, C. ; HUTCHINSON, J. W.: Mechanics of the fiber pushout test. In: *Mechanics of Materials* 14 (1993), Nr. 3, S. 207–221
- [LGS01] LIN, G. ; GEUBELLE, P. H. ; SOTTOS, N. R.: Simulation of fiber debonding with friction in a model composite pushout test. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), Nr. 46–47, S. 8547–8562
- [Lin11] LINDORF, A.: *Ermüdung des Verbundes von Stahlbeton unter Querkzug*, Institut für Massivbau, Technische Universität Dresden, Diss., 2011
- [LK79] LUK, V. K. ; KEER, L. M.: Stress analysis for an elastic half space containing an axially-loaded rigid cylindrical rod. In: *International Journal of Solids and Structures* 15 (1979), Nr. 10, S. 805–827
- [Lun05] LUNDGREN, K.: Bond between ribbed bars and concrete: Part 1: Modified model. In: *Magazine of Concrete Research* 57 (2005), Nr. 7, S. 371–382
- [Lun99] LUNDGREN, K.: *Three-Dimensional Modelling of Bond in Reinforced Concrete: Theoretical Model, Experiments and Applications*. Göteborg, Division of Concrete Structures, Department of Structural Engineering, Chalmers University of Technology, Diss., 1999
- [LZN15] LUNDGREN, K. ; ZANDI, K. ; NILSSON, U.: A Model For The Anchorage of Corroded Reinforcement: Validation and Application. In: STANG, H. (Hrsg.) ; BRAESTRUP, M. (Hrsg.): *fib Symposium Proceedings: Concrete – Innovation and Design*. Copenhagen, Denmark : Fédération Internationale du Béton, 2015, S. 135–146
- [MB14] MAKITA, T. ; BRÜHWILER, E.: Tensile fatigue behaviour of ultra-high performance fibre reinforced concrete (UHPFRC). In: *Materials and Structures* 47 (2014), S. 475–491
- [MH18] MANG, H. A. ; HOFSTETTER, G.: *Festigkeitslehre*. 5., erg. Aufl. Berlin : Springer Vieweg, 2018
- [Mar06] MARKOVIC, I.: *High-Performance Hybrid-Fibre Concrete: Development and Utilisation*, Technische Universität Delft, Diss., Januar 2006

- [MCE85] MARSHALL, D. B. ; COX, B. N. ; EVANS, A. G.: The mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber composites. In: *Acta Metallurgica* 33 (1985), Nr. 11, S. 2013–2021
- [Maz14] MAZUMDER, M. H.: *The anchorage of deformed bars in reinforced concrete members subjected to bending*. Sydney, Australia, School of Civil and Environmental Engineering, Faculty of Engineering, University of New South Wales, Diss., 2014
- [McC87] MCCARTNEY, L. N.: Mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fibre-reinforced composites. In: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 409 (1987), Nr. 1837, S. 329–350
- [McC89] MCCARTNEY, L. N.: New theoretical model of stress transfer between fibre and matrix in a uniaxially fibre-reinforced composite. In: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 425 (1989), Nr. 1868, S. 215–244
- [MKKK85] MEHLHORN, G. ; KOLLEGGGER, J. ; KEUSER, M. ; KOLMAR, W.: Nonlinear contact problems – A finite element approach implemented in ADINA. In: *Computers & Structures* 21 (1985), Nr. 1–2, S. 69–80
- [Mel32] MELAN, E.: Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. In: *Ingenieur-Archiv* 3 (1932), Nr. 2, S. 123–129
- [MLM98] MESCHKE, G. ; LACKNER, R. ; MANG, H. A.: An Anisotropic Elastoplastic-Damage Model for Plain Concrete. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 42 (1998), S. 703–727
- [MS69a] MUKI, R. ; STERNBERG, E.: *Elastostatic load-transfer to a half-space from a partially embedded axially loaded rod*. Los Angeles / Pasadena, Division of Engineering and Applied Science, University of California and California Institute of Technology, Technical Report, 1969
- [MS70] MUKI, R. ; STERNBERG, E.: Elastostatic load-transfer to a half-space from a partially embedded axially loaded rod. In: *International Journal of Solids and Structures* 6 (1970), Nr. 1, S. 69–90
- [MS69b] MUKI, R. ; STERNBERG, E.: On the diffusion of an axial load from an infinite cylindrical bar embedded in an elastic medium. In: *International Journal of Solids and Structures* 5 (1969), Nr. 6, S. 587–605
- [Mül14] MÜLLER, T.: *Untersuchungen zum Biegetragverhalten von Stahlfaserbeton und betonstahlbewehrtem Stahlfaserbeton unter Berücksichtigung des Einflusses von Stahlfaserart und Betonzusammensetzung*, Institut für Betonbau, Universität Leipzig / HTWK Leipzig, Diss., 2014
- [MDS16] MURCIA-DELISO, J. ; SHING, P. B.: Elastoplastic Dilatant Interface Model for Cyclic Bond-Slip Behavior of Reinforcing Bars. In: *Journal of Engineering Mechanics* 142 (2016), Nr. 2, S. 1–13
- [Naa00] NAAMAN, A. E.: Fasern mit verbesserter Haftung. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 95 (2000), Nr. 4, S. 232–238
- [Naa03] NAAMAN, A. E.: Engineered Steel Fibers with Optimal Properties for Reinforcement of Cement Composites. In: *Journal of Advanced Concrete Technology* 1 (2003), Nr. 3, S. 241–252

- [Naa99] NAAMAN, A. E.: Fibres with slip-hardening bond. In: REINHARDT, H. W. (Hrsg.) ; NAAMAN, A. E. (Hrsg.): *Proceedings of Third International Workshop on High Performance Fiber Reinforced Cement Composites (HPFRCC3)*. Cachan, France : RILEM Publications, 1999, S. 371–385
- [NH98] NAAMAN, A. E. ; HAMMOUD, H.: Fatigue Characteristics of High Performance Fiber-Reinforced Concrete. In: *Cement and Concrete Composites* 20 (1998), S. 353–363
- [NNAN91] NAAMAN, A. E. ; NAMUR, G. G. ; ALWAN, J. M. ; NAJM, H. S.: Fiber Pullout and Bond Slip. I: Analytical Study. In: *Journal of Structural Engineering* 117 (1991), Nr. 9, S. 2769–2790
- [Nai04] NAIRN, J. A.: Generalized Shear-Lag Analysis Including Imperfect Interfaces. In: *Advanced Composites Letters* 13 (2004), Nr. 6, S. 263–274
- [Nai07] NAIRN, J. A.: Numerical implementation of imperfect interfaces. In: *Computational Materials Science* 40 (2007), Nr. 4, S. 525–536
- [Nai97] NAIRN, J. A.: On the use of shear-lag methods for analysis of stress transfer in unidirectional composites. In: *Mechanics of Materials* 26 (1997), Nr. 2, S. 63–80
- [NS15] NAIRN, J. A. ; SHIR MOHAMMADI, M.: Numerical and analytical modeling of aligned short fiber composites including imperfect interfaces. In: *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 77 (2015), S. 26–36
- [NS17] NIEMZ, P. ; SONDEREGGER, W. U.: *Holzphysik: Physik des Holzes und der Holzwerkstoffe*. München : Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2017
- [OE15] OETTEL, V. ; EMPELMANN, M.: Zugspannungs-Dehnungs-Beziehung für UHPFRC in Anlehnung an DAfStb-Richtlinie Stahlfaserbeton. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 110 (2015), Nr. 7, S. 468–478
- [OME19] OETTEL, V. ; MATZ, H. ; EMPELMANN, M.: Bestimmung der zentrischen Nachrisszugfestigkeit von UHPFRC mithilfe gekerbter 3-Punkt-Biegezugversuche. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 114 (2019), Nr. 4, S. 255–264
- [One14] ONESCHKOW, N.: *Analyse des Ermüdungsverhaltens von Beton anhand der Dehnungsentwicklung*, Institut für Baustoffe, Leibniz Universität Hannover, Diss., 2014
- [OAV99] ORANGE, G. ; ACKER, P. ; VERNET, C.: A new generation of UHP concrete: Ductal damage resistance and micromechanical analysis. In: REINHARDT, H. W. (Hrsg.) ; NAAMAN, A. E. (Hrsg.): *Proceedings of Third International Workshop on High Performance Fiber Reinforced Cement Composites (HPFRCC3)*. Cachan, France : RILEM Publications, 1999, S. 101–111
- [PG93] PAK, R. Y. ; GOBERT, A. T.: Axisymmetric problems of a partially embedded rod with radial deformation. In: *International Journal of Solids and Structures* 30 (1993), Nr. 13, S. 1745–1759
- [PW16] PAGGI, M. ; WRIGGERS, P.: Node-to-segment and node-to-surface interface finite elements for fracture mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 300 (2016), S. 540–560
- [Par03] PARISCH, H.: *Festkörper-Kontinuumsmechanik: Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen*. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden : B. G. Teubner, 2003

- [Pfy03] PFYLL, T.: *Tragverhalten von Stahlfaserbeton*, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Diss., 2003
- [Pig66] PIGGOTT, M. R.: A theory of fibre strengthening. In: *Acta Metallurgica* 14 (1966), Nr. 11, S. 1429–1436
- [Pig87] PIGGOTT, M. R.: Debonding and friction at fibre-polymer interfaces. I: Criteria for failure and sliding. In: *Composites Science and Technology* 30 (1987), Nr. 4, S. 295–306
- [Pig70] PIGGOTT, M. R.: Theoretical estimation of fracture toughness of fibrous composites. In: *Journal of Materials Science* 5 (1970), Nr. 8, S. 669–675
- [PT78a] PINCHIN, D. J. ; TABOR, D.: Inelastic behaviour in steel wire pull-out from Portland cement mortar. In: *Journal of Materials Science* 13 (1978), S. 1261–1266
- [PT78b] PINCHIN, D. J. ; TABOR, D.: Interfacial Phenomena in Steel Fibre Reinforced Cement: II: Pull-Out Behaviour of Steel Wires. In: *Cement and Concrete Research* 8 (1978), S. 139–150
- [QWMW18] QI, Ji. ; WU, Z. ; MA, Z. J. ; WANG, J.: Pullout behavior of straight and hooked-end steel fibers in UHPC matrix with various embedded angles. In: *Construction and Building Materials* 191 (2018), S. 764–774
- [Ran76] RANKINE, W. J. M.: *Manual of Applied Mechanics*. Eighth Ed., rev. London : Charles Griffin and Company, 1876
- [Reh61] REHM, G.: *Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton*. Berlin : Wilhelm Ernst & Sohn, 1961 (Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 138)
- [RDZ77] REHM, G. ; DIEM, P. ; ZIMBELMANN, R.: *Technische Möglichkeiten zur Erhöhung der Zugfestigkeit von Beton*. Berlin : Wilhelm Ernst & Sohn, 1977 (Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 283)
- [RE79] REHM, G. ; ELIGEHAUSEN, R.: Bond of ribbed bars under high cycle repeated loads. In: *ACI Journal Symposium Paper* 76 (1979), Nr. 15, S. 297–309
- [Rei04] REINECKE, R.: *Haftverbund und Rissverzahnung in unbewehrten Betonschubfugen*, Lehrstuhl für Massivbau, Technische Universität München, Diss., 2004
- [Rei40] REISSNER, E.: Note on the Problem of the Distribution of Stress in a Thin Stiffened Elastic Sheet. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 26 (1940), Nr. 4, S. 300–305
- [RM87] RESENDE, L. ; MARTIN, J. B.: Closure to „Formulation of Drucker-Prager Cap Model“ by Luis Resende and John B. Martin (July, 1985, Vol. 111, No. 7). In: *Journal of Engineering Mechanics* 113 (1987), Nr. 8, S. 1257–1259
- [RM85] RESENDE, L. ; MARTIN, J. B.: Formulation of Drucker-Prager Cap Model. In: *Journal of Engineering Mechanics* 111 (1985), Nr. 7, S. 855–881
- [RL20] RIEDEL, P. ; LEUTBECHER, T.: Einfluss der Faserorientierung und des Fasergehalts auf die Druckfestigkeit von ultrahochfestem Beton. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 115 (2020), Nr. 10, S. 789–800
- [RIL70] RILEM – RÉUNION INTERNATIONALE DES LABORATOIRES ET EXPERTS DES MATÉRI-AUX, SYSTÈMES DE CONSTRUCTION ET OUVRAGES: Essais portant sur l'adhérence des armatures du béton, 2. Essai par traction. In: *Matériaux et Constructions* 3 (1970), Nr. 15, S. 175–178

- [Rit14] RITTER, L.: *Der Einfluss von Querkzug auf den Verbund zwischen Beton und Betonstahl*, Institut für Massivbau, Technische Universität Dresden, Diss., 2014
- [SRRSD19] SCHAAN, G. ; RYBCZYNSKI, S. ; RITTER, M. ; SCHMIDT-DÖHL, F.: Transmission Electron Microscopy Investigations Of Fatigue-Induced Changes In The Cement Structure Of Ultra-High Performance Concrete. In: INTERNATIONAL CEMENT MICROSCOPY ASSOCIATION (ICMA) (Hrsg.): *Proceedings of 41st International Conference on Cement Microscopy*. San Diego, California, USA, 2019
- [Sch75a] SCHÄFER, H.: A contribution to the solution of contact problems with the aid of bond elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 6 (1975), Nr. 3, S. 335–353
- [Sd93] SCHELLEKENS, J. C. J. ; DE BORST, R.: On The Numerical Integration Of Interface Elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), S. 3–66
- [Sch75b] SCHNÜTGEN, B.: *Das Festigkeitsverhalten von mit Stahlfasern bewehrtem Beton unter Zugbeanspruchung*, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 1975
- [SH16] SCHOLZ, W. ; HIESE, W. ; MÖHRING, R. (Hrsg.): *Baustoffkenntnis*. 18. neu bearb. und aktual. Aufl. Köln : Bundesanzeiger Verlag, 2016
- [SR85] SELVADURAI, A. P. S. ; RAJAPAKSE, R. K. N. D.: On the load transfer from a rigid cylindrical inclusion into an elastic half space. In: *International Journal of Solids and Structures* 21 (1985), Nr. 12, S. 1213–1229
- [SA11] SERPIERI, R. ; ALFANO, G.: Bond-slip analysis via a thermodynamically consistent interface model combining interlocking, damage and friction. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 85 (2011), Nr. 2, S. 164–186
- [SS91] SLAUGHTER, W. S. ; SANDERS, J. L.: A model for load-transfer from an embedded fiber to an elastic matrix. In: *International Journal of Solids and Structures* 28 (1991), Nr. 8, S. 1041–1052
- [Spe08] SPECK, K.: *Beton unter mehraxialer Beanspruchung: Ein Materialgesetz für Hochleistungsbeton unter Kurzzeitbelastung*, Institut für Massivbau, Technische Universität Dresden, Diss., 2008
- [Ste13] STENGEL, T.: *Verbundverhalten und mechanische Leistungsfähigkeit von Stahlfasern in ultrahochfestem Beton*, Lehrstuhl für Baustoffkunde und Werkstoffprüfung, Technische Universität München, Diss., 2013
- [SS86] STANG, H. ; SHAH, S. P.: Failure of fibre-reinforced composites by pull-out fracture. In: *Journal of Materials Science* 21 (1986), Nr. 3, S. 953–957
- [TA73] TAKAKU, A. ; ARRIDGE, R. G. C.: The effect of interfacial radial and shear stress on fibre pull-out in composite materials. In: *Journal of Physics D: Applied Physics* 6 (1973), Nr. 17, S. 2038–2047
- [Tep73] TEPFERS, R.: *A Theory of Bond Applied to Overlapped Tensile Reinforcement Splices For Deformed Bars*. Göteborg, Division of Concrete Structures, Department of Structural Engineering, Chalmers University of Technology, Diss., 1973

- [TO92] TEPFERS, R. ; OLSSON, P.-A.: Ring tests for evaluation of bond properties of reinforcing bars. In: EURO-INTERNATIONAL COMMITTEE FOR CONCRETE (Hrsg.) ; RIGA TECHNICAL UNIVERSITY (Hrsg.): *Proceedings of International Conference „Bond in Concrete: From Research to Practice“*. Riga, Latvia, 1992
- [Thi16] THIELE, M.: *Experimentelle Untersuchung und Analyse der Schädigungsevolution in Beton unter hochzyklischen Ermüdungsbeanspruchungen*, Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung (BAM), Technische Universität Berlin, Diss., 2016
- [Tim55] TIMOSHENKO, S.: *Strength of materials: Part 1 – Elementary theory and problems*. Second Ed., tenth printing. Toronto, New York, London : D. van Nostrand Company, Inc., 1955
- [TG87] TIMOSHENKO, S. P. ; GOODIER, J. N.: *Theory of elasticity*. 3. Ed., McGraw-Hill classic textbook reissue. New York : McGraw-Hill Book Company, 1987
- [TO19] TOMANN, C. ; ONESCHKOW, N.: Influence of moisture content in the microstructure on the fatigue deterioration of high-strength concrete. In: *Structural Concrete* 20 (2019), Nr. 4, S. 1204–1211
- [Vil96] VILLARD, P.: Modelling of interface problems by the finite element method with considerable displacements. In: *Computers and Geotechnics* 19 (1996), Nr. 1, S. 23–45
- [Vol38] VOLKERSEN, O.: Die Nietkraftverteilung in zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten. In: *Luftfahrtforschung* 15 (1938), S. 41–47
- [VF03] VOO, J. Y. L. ; FOSTER, S. J.: Variable Engagement Model for the Design of Fibre Reinforced Concrete Structures. In: MISTRY, V. (Hrsg.) ; AZIZINAMINI, A. (Hrsg.) ; HOOKES, J. M. (Hrsg.): *Proceedings of Advanced Materials for Construction of Bridges Buildings, and Other Structures III*. Davos, Switzerland, 2003 (Engineering Conferences International)
- [Wef10] WEFER, M.: *Materialverhalten und Bemessungswerte von ultrahochfestem Beton unter einaxialer Ermüdungsbeanspruchung*, Institut für Baustoffe, Leibniz Universität Hannover, Berichte aus dem Institut für Baustoffe, Bd. 7, Zugl.: Diss., 2010
- [WN12] WILLE, K. ; NAAMAN, A. E.: Pullout Behavior of High-Strength Steel Fibers Embedded in Ultra-High Performance Concrete. In: *ACI Materials Journal* (2012), Nr. 109–M46, S. 479–588
- [Win98] WINTERBERG, R.: *Untersuchungen zum Reißverhalten von Stahlfaserbeton und stahlfaserverstärktem Stahlbeton*, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen, Zugl. Diss., 1998
- [Wir04] WIRTH, C.: *Berechnungskonzept für die Klebflanschfestigkeit in Gesamtkarosseriemodellen*, Institut für Baustoffe und Konstruktion, Technische Universität München, Diss., 2004
- [Zha16] ZHAN, Y.: *Multilevel Modeling of Fiber-Reinforced Concrete and Application to Numerical Simulations of Tunnel Lining Segments*, Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Ruhr-Universität Bochum, Diss., 2016
- [ZNW73] ZIEGLER, H. ; NÄNNI, J. ; WEHRLI, C.: Zur Konvexität der Fliessfläche. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* 24 (1973), S. 140–144
- [ZFT14] ZIENKIEWICZ, O. C. ; FOX, D. ; TAYLOR, R. L.: *The finite element method for solid and structural mechanics*. Seventh Ed. Oxford : Elsevier – Butterworth-Heinemann, 2014





## Berichte aus dem Institut für Statik seit 2006

- Nr. 2006-100 D. DINKLER (HRSG.): Institut für Statik, Lehre und Forschung, 1996-2006
- Nr. 2006-101 A. VEHRE: Ein Reduktionsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit Finiten Raum-Zeit-Elementen
- Nr. 2006-102 M. LÖHR: Analyse aeroelastischer Systeme mit Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methoden
- Nr. 2006-103 L. ASCHENBRENNER: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt
- Nr. 2006-104 T. ZÜMENDORF: Ein gradientenabhängiges Modell für Schädigung bei viskoplastischem Materialverhalten
- Nr. 2007-105 C. LEPPERT: Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos
- Nr. 2007-106 V. KRASE: Stability of Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2007-107 J. PONTOW: Imperfektionsempfindlichkeit und Grenzlasten von Schalentragwerken
- Nr. 2009-108 M. BECKMANN: Ein gradientenabhängiges Modell für anisotrope Schädigung von Beton unter Berücksichtigung von Porendruck
- Nr. 2010-109 P. SUN: Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit aktiver Schwingungskontrolle durch piezoelektrische Materialien
- Nr. 2010-110 J. VELDE: 3D Nonlocal Damage Modeling for Steel Structures under Earthquake Loading
- Nr. 2010-111 K. SCHUSTER: Systemidentifikation und Bauwerksüberwachung mit piezokeramischen Aktuatoren
- Nr. 2011-112 S. BENTE: Interaction of Degradation, Deformation and Transport Processes in Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2011-113 L. OSTERMANN: Hochtemperaturverhalten von Beton – Gekoppelte Mehrfeld-Modellierung und numerische Analyse
- Nr. 2012-114 B. BRODERSEN: Modellierung des thermo-mechanischen Verbundverhaltens von Asphalt in Straßenaufbauten
- Nr. 2012-115 J. KINDLEIN: Gekoppelte Analyse von Reaktions- und Transportprozessen in Depo-niestrukturen
- Nr. 2015-116 F. PASENOW: Modellierung oberflächengekoppelter Mehrfeldsysteme und numerische Analyse rutschender Bodenmaterialien

- Nr. 2015-117 M. SCHAUER: Ein effizienter gekoppelter FEM-SBFEM Ansatz zur Analyse von Boden-Bauwerk-Interaktionen im Zeitbereich
- Nr. 2016-118 A. ALFARRA: Numerische Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen mit RANS-Turbulenzmodellen
- Nr. 2016-119 S. REINSTÄDLER: Modellierung und numerische Analyse der Entleerung von dünnwandigen Silos
- Nr. 2016-120 F. CRAMER: Mehrfeld-Modell für chemisch-physikalische Alterungsprozesse von Beton
- Nr. 2018-121 T. BLUME: Mikromechanisch begründete Modellbildung des thermo-mechanischen Werkstoffverhaltens von Asphalt
- Nr. 2018-122 F. OCKELMANN: Modellierung und numerische Analyse von Beton und faserverstärktem Ultrahochleistungsbeton mit der Diskrete Elemente Methode
- Nr. 2019-123 A. GAFOOR: Modeling and numerical analysis of damage behavior of concrete
- Nr. 2019-124 H.-H. HERMERSCHMIDT: Entwicklung eines Berechnungsmodells zur Untersuchung der Strömungsvorgänge an Überfallschütz und drehendem Schaufelwasserrad
- Nr. 2019-125 C. FLACK: Mehrfeldmodellierung von Beton mit diskreten Element Methoden
- Nr. 2020-126 S. KERN: Imperfektionsempfindlichkeit ausgesteifter Schalentragerwerke
- Nr. 2021-127 I. KRUKOW: Flatterverhalten eines Flügels mit Coanda-Klappe
- Nr. 2021-128 N. NEUERT: Ein reduziertes Modell zur Untersuchung der Aeroelastizität von Tragflügeln mit Hochauftriebssystemen
- Nr. 2021-129 S. HÖPER: Modellierung und numerische Analyse des Faser-Matrix-Verbundes in UHPFRC unter Zugbeanspruchung

## Sonderdrucke

D. DINKLER (HRSG.), U. KOWALSKY (HRSG.): Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens. Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998)

D. DINKLER (HRSG.): Baustatik-Baupraxis 8. Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig

Die Berichte können durch das Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig, Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, telefonisch unter +49 531/391-3667 oder per Mail an [statik@tu-bs.de](mailto:statik@tu-bs.de) bezogen werden.